

**Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy
učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci**

Matematika pro rozvoj myšlení a představivosti

Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.

Úvod

Matematická gramotnost je pojem, který rezonuje v současné době nejen v komunitě učitelů, ale také mezi rodiči, žáky a široké odborné veřejnosti. Definice matematické gramotnosti se objevují v odborné literatuře často, ale z různého pohledu. V článku se budeme opírat o definici, kterou uvádí studie OECD PISA: „*Matematická gramotnost je schopnost jedince rozpoznat a pochopit úlohu matematiky ve světě, dělat zdůvodněná hodnocení, používat matematiku a zabývat se matematikou způsoby, které odpovídají potřebám života konstruktivně přemýšlejícího občana*“. Článek považujeme za vhodný nejen pro učitele matematiky a studenty oboru učitelství matematiky pro základní školy, ale také je vhodný pro všechny pedagogické pracovníky a studenty pedagogických disciplín.

Matematickým dovednostem se učíme od útlého věku. Děti v předškolním věku se učí od rodičů počítat na prstech, počítají vagóny projíždějícího vlaku, počet aut na parkovišti a mnoho dalších zajímavých početních situací, které jsou pro děti velice zábavné. Na základní, střední a vysoké škole zjišťují, že matematika je velmi rozsáhlou vědou.

Soudobé trendy ve vzdělávání (nejen v matematice a přírodních vědách) jsou charakteristické změnou způsobu získávání a osvojování nových poznatků žákem. Charakteristickým rysem takto pojatého vzdělávání není osvojení si již hotových poznatků, které mu jsou byt s využitím nejmodernějších didaktických prostředků v různé podobě předkládány, ale vytváření vhodných situací, které žákovi umožní nové skutečnosti samostatně objevovat a poznání aktivně konstruovat (*Dostál, 2013*). Můžeme tedy změnu přístupů ke vzdělávání charakterizovat jako „od transmisivní ke konstruktivistické výuce“ (*Novák, 2013*).

Konstruktivistické pojetí matematického vyučování¹ zdůrazňuje aktivní úlohu žáka, význam jeho vnitřních předpokladů a individuálních zkušeností v procesu osvojování pojmů, důležitost vzájemné interakce mezi učitelem, žákem a prostředím. Pro vyučování matematice

¹ Výstižnou charakteristiku v podobě „desatera“ konstruktivismu podávají v publikaci *Dítě, škola a matematika* Hejný a Kuřina.

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

je charakteristické vytváření situací, kdy žáci sami pocítí potřebu objevit, osvojit si jim prozatím ukrytý jev. Jak zdůrazňují Hejný a Kuřina (2001), vyplývá odtud sama povaha konstruktivisticky orientovaného matematického vyučování. Výstavba žákova poznání je *aktivním, činnostním procesem*. Žákovi musí být poskytnuta příležitost, aby s učivem pracoval. Je zřejmé, že činnosti bývají zprvu fyzické (manipulativní činnosti s konkrétními předměty), později probíhají v mysli (mentální operace).

Badatelsky orientovaná výuka matematiky (BOVM) je charakterizována jako *konstruktivistický vzdělávací a vyučovací směr, označovaný v angličtině inquiry based education (IBE - inquiry – bádání, zkoumání, ale také hledání pravdy)*.² S určitou mírou zjednodušení lze badatelsky orientované vyučování popsat jako takové, „při kterém je žákům/studentům nabídnuta možnost používat tzv. badatelské postupy a metody práce, tedy postupy a metody, které při své výzkumné práci používají odborní vědečtí pracovníci. Tyto postupy a metody jsou samozřejmě přizpůsobeny školnímu kontextu, a tak žáci/studenti místo nových vědeckých objevů znovuobjevují školskou matematiku nebo řeší jednoduché aplikační problémy související s každodenní realitou. V jistém smyslu může být BOVM chápáno jako propedeutika teoretické i aplikované matematiky.“ (Samková, 2016, s. 9).

1 Badatelsky orientovaná výuka

Badatelsky orientovaná výuka je tedy výuka inspirovaná bádáním a badatelskými postupy. Dostál (2013) ji vymezuje jako *činnost učitele a žáka zaměřená na rozvoj znalostí, dovedností a postojů na základě aktivního a relativně samostatného poznávání skutečnosti žákem, kterou se sám učí objevovat a objevuje*.

V českém vzdělávacím prostředí se pojem BOVM sice objevil teprve nedávno, ale teoretické rámce založené na podobných myšlenkách se objevovaly i dříve: např. učení řešením úloh a problémů, teorie didaktických situací, v novějších vzdělávacích koncepcích *uplatnění heuristických metod nebo řešení problémových úloh*. Problémově orientované učení, které se zaměřuje na osvojování znalostí a dovedností prostřednictvím analýzy a řešení problémů, se v edukační praxi běžně prosazuje v celé Evropě.

² „Inquiry“ je v literatuře vymezováno různými způsoby. Uvedeme citaci z práce autorů Linnové, Davise a Bella, 2004, s. 15, jak ji uvádí Janík a Stuchlíková (2010, s. 21): „Inquiry je cílevědomý proces formulování problémů, kritického experimentování, posuzování alternativ, plánování, zkoumání a ověřování, vyvozování závěrů, vyhledávání informací, vytváření modelů studovaných dějů, rozpravy s ostatními a formování koherentních argumentů.“

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

V naší stati budeme považovat oba uvedené přístupy - *badatelsky orientované vyučování a problémové vyučování* - za víceméně rovnocenné. Naše pojetí má nejblíže k „objevování prostřednictvím řešení úloh“ (Novotná, 2004). Podle Hejného a Kuřiny (2001) je právě *objev aktem konstrukce*, je nejdůležitějším aktem procesu poznávání vůbec.

Badatelský přístup může být posuzován ze dvou stran: na jednu stranu mohou aktivity spojené s badatelskou výukou matematiky působit jen jako hraní, *hraní s matematikou*, ale praxe potvrzuje, že na druhou stranu tyto aktivity pomáhají *efektivnímu využití matematických znalostí*. Je to vlastně nenápadná implementace a integrace postupů, které se později využívají na vědecké úrovni. Zároveň má badatelská matematika blíže ke každodenní realitě a odpovídá na otázky „proč se to učíme?“ či „k čemu je to dobré?“

Přestože se badatelsky orientovaná výuka jeví jako relativně nový pojem (a výsledky výzkumných šetření naznačují její neznalost mezi učiteli a z toho plynoucí dosavadní malou míru uplatnění v praxi matematické edukace), teoretické rámce založené na podobných myšlenkách se objevovaly už dlouho před ní.

Podrobněji o této metodě informují Stuchlíková (2010), Dostál (2013), v českém vzdělávacím kontextu primární školy Hošpesová (2014) a další autoři, kteří ve svých studiích uvádějí i relevantní zahraniční prameny.

Aby se při řešení úlohy mohlo uskutečnit bádání, měla by úloha obsahovat něco pro řešitele neznámého, co je vnímáno jako podnětné nebo zajímavé, a zároveň by řešitel měl mít možnost k této neznámé části přistupovat prostřednictvím věcí již známých. Známé věci umožňují řešiteli vyvozovat domněnky a úsudky a jejich prostřednictvím hledat cestu k řešení úlohy.

Pro praxi matematického vzdělávání v základní škole můžeme základní znaky výuky zaměřené na bádání shrnout v následujících heslech (*volně podle Artigue a Baptist, 2012*):

- zařazování úloh a otázek, které mohou být různě interpretovány, mají více způsobů řešení, více správných odpovědí, např. divergentních úloh;
- pokusy o objevování a znovuobjevování (jako doplněk k deduktivnímu přístupu);

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

- učení se z chyb (hlavně vlastních, ale i cizích; chyba je chápána jako nedílná součást učebního procesu: „*Neděláme chyby proto, že se neučíme. Děláme chyby proto, že se učíme*“³);
- zajištění dostatečně husté sítě základních znalostí (na nichž by bylo možné dále stavět);
- kumulativní styl učení (propojování nových poznatků s dříve nabytými znalostmi);
- propojení matematiky s jinými obory (i nevšedními, např. českým jazykem či dějepisem)⁴.

Zdrojem matematického bádání při výuce se mohou stát:

- přírodní jevy (*Jak a proč se mění stín předmětu osvětleného sluncem?*);
- technické problémy (*Jak lze změřit velikost objektu, který je nedostupný?*);
- každodenní problémy (*Který telefonní tarif je pro mě nejvhodnější?*);
- lidské vynálezy (*Jak funguje GPS?*);
- umění (*Které symetrie lze objevit v architektonickém nebo uměleckém díle?*);
- a samozřejmě matematické objekty (*Mám-li dva trojúhelníky stejného obsahu, mohu jeden rozstříhat a poskládat z něj druhý?*).

Aktuálnost problematiky implementace badatelsky orientované výuky do edukační praxe podtrhují i další skutečnosti:

- na pravidelně konané konferenci s názvem „Setkání učitelů matematiky všech stupňů a typů škol“, konané v listopadu 2014 v Srní, byly prezentovány tři navzájem navazující příspěvky pod názvem *Sedm podob badatelsky orientovaného vyučování I - III*, jejichž cílem bylo pomocí různě zaměřených ilustračních příkladů vyjasnit podstatu BOV v matematice⁵,
- v České republice i v zahraničí byly v minulých letech s podporou Evropské unie realizovány projekty, zaměřené na uplatnění BOV. Uvedme alespoň „Projekt

³ Uvedená věta je na webové stránce uvedena jako motto jedné z brněnských základních škol (ZŠ Masárova).

⁴ Konkrétní náměty na využití inspirací z médií k rozvoji čtenářské gramotnosti a k badatelsky orientované výuce lze najít např. v publikaci Nováková, E. aj. Ilustrativní texty a aktivity pro žáky 1. stupně ZŠ. In Fuchs, E., Zelenková, E. (Eds.) *Matematika v médiích. Využití slovních úloh při kooperativní výuce na základních a středních školách*. JČMF, 2015, s. 16 - 55.

⁵ Autory uvedené série článků jsou L. Samková, F. Roubíček a M. Tichá - A. Hošpesová

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

FIBONACCI⁶ a na Slovensku (kde je BOV označováno jako „objevné vyučování“) „Projekt PRIMAS“⁷. Na webových stránkách projektů lze najít řadu materiálů pro konkrétní edukační praxi.

2 Profesní kompetence učitele jako předpoklad realizace BOV v edukační praxi

Jak upozorňuje Hošpesová (2014), setkáváme se někdy v českém vzdělávacím kontextu s vágními až naivními představami o badatelských přístupech k výuce. Slova „badatelsky orientovaná“ výuka vyvolávají (zejména u neučitelské veřejnosti) představu, že se jedná o bezprostřední zprostředkování posledních poznatků vědy do školního vzdělávání, což se jeví v matematice jako nemožné. Autorka schematicky znázornila BOV jako průnik čtyř charakteristik: *záměrů kurikula, žákovských a učitelových aktivit* specifických pro takto orientovanou výuku a *kultury vyučování* (schéma 1):

⁶ <http://www.fibonacci-project.eu>, <http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/fibo.html>

⁷ <http://www.primas-project.eu>, <http://www.primas.ukf.sk/aboutIBL.html>

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

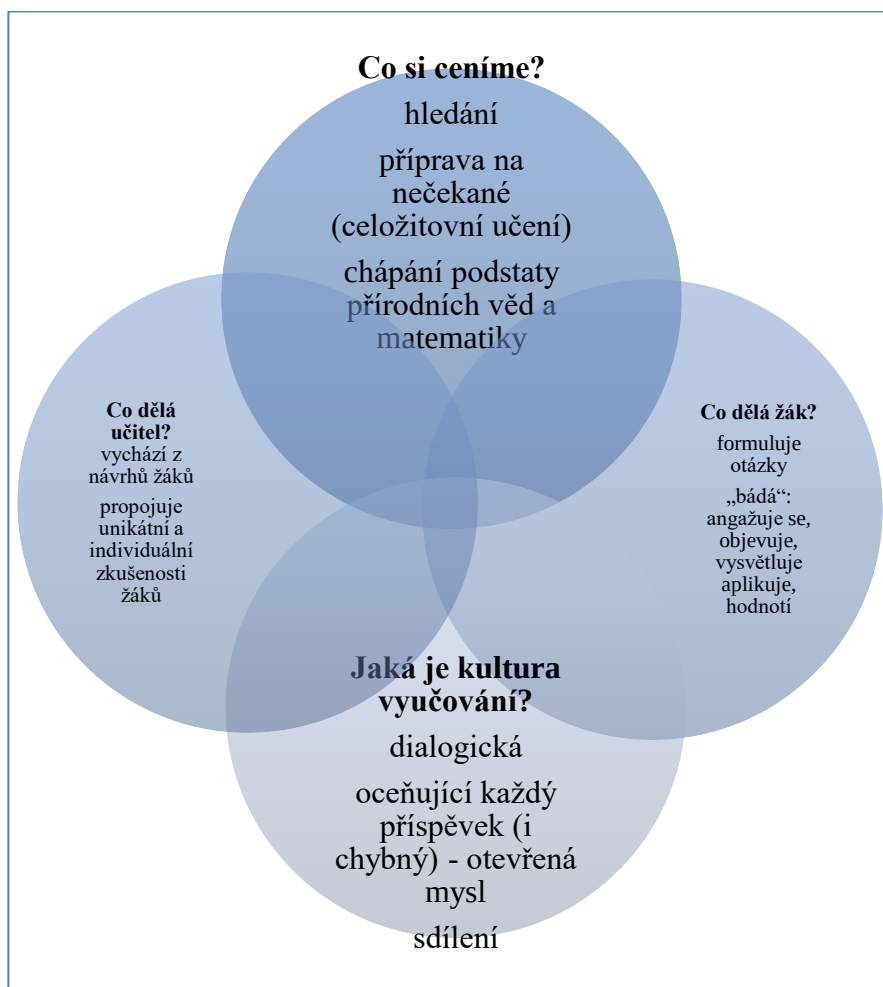


Schéma 1: BOV jako průnik základních charakteristik (podle Hošpesová, 2014)

Praxe vyučování matematice potvrzuje, že badatelsky orientované vyučování klade značné nároky na *profesní kompetence učitele*. Jedná se o *oborově didaktické kompetence* jako jádro profesních kompetencí učitelů. Zahrnují zvláště znalost oboru i didaktických přístupů k němu, znalost kurikula a uplatnění těchto znalostí v praxi (při realizaci školního vzdělávacího programu příslušné školy) a také umění kvalifikovaně reagovat na projevy žáků ve vyučování. Podstatné jsou ovšem také rozvinuté *kompetence obecnějšího charakteru*, jejichž uplatnění přesahuje jeden obor (školní předmět) studia - umět žáka vhodně motivovat, umět komunikovat se žáky - pregnantní formulace otázek směřujících k dosažení cíle - a umět adekvátně hodnotit výkon žáka. Zřetelně se však projevují také další obtíže spojené se zaváděním badatelských přístupů. Ze strany žáka jde někdy o malou motivaci a problematické zázemí potřebných matematických znalostí a dovedností, ze strany učitele – kromě již

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

uvedených potřebných profesních kompetencí - značná náročnost na přípravu a materiální zdroje (pracovní listy, pomůcky,...) a s ní omezené možnosti realizace v běžné edukační realitě. I když učitel předem připraví scénář v podobě podrobného rozpracování připravené aktivity, nemůže se vyhnout zřejmému riziku, že jeho realizace nenaplní očekávané předpoklady a stanoveného cíle nebude dosaženo. Z uvedených skutečností je patrný akcent na kreativitu a flexibilitu učitele, aby i takovou situaci dokázal v souladu s principy a cíli badatelsky orientované výuky využít.

Nové závažné poznatky o problematice profesních kompetencí učitele matematiky očima učitelů v souvislosti s odhalováním „kritických míst matematiky na základní škole“ přinášejí závěry rozsáhlého výzkumného šetření autorů Rendl, Vondrová (2013).

Pro úspěšnou realizaci badatelsky orientovaného učení v rovině práce učitele je důležité propojování oborového a didaktického aspektu vzdělávání, propojování věcného obsahu vzdělávání se zprostředkujícími výukovými myšlenkovými konstrukcemi s formou a metodou vyučování. Janík (2008) hovoří v souvislosti s potřebou integrace aspektu „oborového“ a „didaktického“ o didaktické znalosti obsahu, tj. *znalosti obsahu (oboru) vhodné pro vyučování předmětu*. Pro učitele, který užívá badatelsky orientovanou výuku, je dobrá didaktická znalost obsahu nezbytností.

2.1 Badatelsky orientovaná výuka matematiky (BOVM) v soutěžích

Žáci a studenti, kteří si matematiku oblíbili a kteří se chtějí o matematice dozvědět více, se účastní matematických soutěží, aby mohli své nabyté vědomosti porovnat s ostatními žáky a studenty z jiných škol. Tyto soutěže neprobíhají pouze v rámci třídy nebo školy, ale postupně vznikala okresní, krajská a nakonec i mezinárodní kola, ve kterých soutěží jen ti nejlepší. Obecně lze soutěže rozdělit na soutěže pro žáky a studenty nadané a netalentované. Pro talentované žáky a studenty se každý rok pořádá *Matematická olympiáda*. Pro žáky a studenty, které matematika baví, ale nemají matematický talent a nadání je určena soutěž *Matematický klokan*. *Matematický klokan* je soutěž, ve které se žákům a studentům předkládají zajímavé příklady, zábavné příklady a matematické problémy. Cílem této soutěže je rozvíjet u žáků a studentů zájem o matematiku. Podobné zaměření mají soutěže *Pythagoriáda* a *matematické korespondenční soutěže*. Všechny tyto soutěže jsou zdrojem velkého množství příkladů a úloh pro žáky a studenty, kteří se chtějí o matematice dozvědět

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

více. Matematické úlohy ze soutěží mohou využívat učitelé, žáci, studenti i rodiče, kterým záleží na budoucnosti svých dětí a chtějí se podílet na rozumovém vývoji svého dítěte.

V článku popisujeme didaktickou stránku matematické úlohy – její definici, vznik a její řešení. V praktické části článku jsou potom uvedeny příklady z matematické soutěže *Matematický klokan*. Uvádíme především úlohy zaměřené na rozvoj prostorové představivosti, která je nutná pro žáky a studenty, kteří se chtějí v budoucnu zaměřit na studium technických oborů.

2.2 Učební úlohy

Učební úlohy plní nejdůležitější funkci v řízení učení a aktivizaci žáků. Chceme-li, aby žáci byli aktivní v hodinách, aby se učili efektivně a látce porozuměli, musíme jim zadávat určité úlohy. Dále tyto úlohy slouží k ověřování plnění výukových cílů. Učební úlohy jsou všechna učební zadání, která užívají všichni učitelé ve své každodenní práci. Důležité při řešení učebních úloh je to, aby žáci získali nejen nové vědomosti a dovednosti, ale aby také opakovali a procvičovali probrané učivo z dřívějších hodin. Veškeré učivo by mělo být formulováno ve vědním systému daného předmětu, který bude pro žáky srozumitelný a přístupný. Učební úlohy u žáků mají také rozvíjet schopnost týmové spolupráce, dovednost pracovat s literaturou, volit vhodné metody práce, osvojovat si myšlenkové operace potřebné k řešení problémů a získávat osobní vlastnosti, zvláště cílevědomost, svědomitost, apod. (Kalhous, 2002).

Definice učebních úloh ve výuce

Úlohy se obecně definují podle D. Holoušové. Její definice učební úlohy je jako široká škála všech učebních zadání, a to od nejjednodušších úkolů, vyžadujících pouhou pamětní reprodukci poznatků, až po složité úkoly, které vyžadují tvořivé myšlení. Tyto úlohy mají být podřízené výukovému cíli, dále z něho mají vycházet a na konci probraného tématu by měly ověřit zpětnou vazbu prostředků a ověřit splnění příslušného výukového cíle. Podle D. Holoušové a dalších autorů, sehrávají učební úlohy velmi velkou roli ve výuce:

- Úlohy mají být v celém vyučovacím procesu, nemají se objevovat pouze na začátku a konci vyučovacích hodin (tematického celku), ale mají být používány i ve výkladové části vyučování. Učební úlohy mají jak funkci vzdělávací, tak i formativní.

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

- Ve výuce nemají hrát autonomní roli, jsou jednou z jejich složek, mají instrumentální charakter.
- Úlohy nezasadáváme samostatně, ale v celých systémech, při zvyšující náročnosti úloh nesmí být úlohy monotónní, mají vzbuzovat dojem, že vyplynuly ze situace, která se objevila ve výuce.
- Při vytváření učebních úloh může učitel improvizovat, ale nikdy by neměly být úlohy vytvářeny bezděky. Sbírky učebních úloh by měly být dostatečně velké a otevřené, aby je učitel mohl přizpůsobit konkrétní situaci ve výuce.
- Aby se správně vytvářely učební úlohy, je důležité umět zformulovat výukové cíle, vzhledem k nim, by měly být učební úlohy přesně definované, aby v daných podmínkách byly splněné stanovené výukové cíle.
- Při vytváření učebních úloh se projevuje profesionalita učitele. V rámci pregraduální a postgraduální přípravy v těchto dovednostech by se měl učitel stále zdokonalovat.

(Kalhous, 2002)

Postavení úloh ve výuce matematiky

Vhodně formulovaná úloha, která dokáže studenta zaujmout, přimět jej, aby se zamyslel a pokusil se ji vyřešit, je neocenitelným nástrojem při výuce téměř všech předmětů na základních, středních, ale i vysokých školách. Úlohy a jejich řešení jsou základem ve vyučování. Nejvíce se s úlohami setkáváme v hodinách matematiky. Jejím úkolem a smyslem je u žáků a studentů vzbudit samostatnost při řešení úloh. V matematice jsou úlohy nepostradatelné k plnění vzdělávacích i výchovných cílů a k realizaci spojení školy se životem. V jednotlivých fázích vyučovacího procesu má zařazení úloh různé cíle:

- 1) Motivaci nového učiva – motivační úlohy.
- 2) Ilustraci výkladu učiva – ilustrující úlohy.
- 3) Získávání nových poznatků – poznávací a rozvíjející úlohy.
- 4) Upevňování poznatků a procvičování učiva – cvičení.
- 5) Prověřování zvládnutí učiva při zkoušení.

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

Při řešení matematických úloh narážíme na různé pojmy jako je: úloha, problém, cvičení a příklad. Mohlo by se zdát, že mezi nimi není žádný rozdíl, ale opak je pravdou.

Úloha

V matematice je určena dvěma významy, kdy při řešení úloh vždy poznáme, zda se jedná o první nebo druhý význam úlohy:

- 1) Jedná se o obecné označení pro určení neznámých složek problémové situace.
- 2) Zadání situace doposud typově neřešené, kde vystačíme se známými poznatky a známým aparátem.

Problém

Někdy se také nazývá jako problematická úloha, u které je zapotřebí větší podíl tvořivosti a vynalézavosti.

Cvičení

Má význam první definice úlohy. Slouží k procvičování probrané látky, algoritmů, vzorců, početních nebo i grafických postupů.

Příklad

Za příklad považujeme tzv. vzorový příklad. Jedná se o příklad, který je vyřešený jedním nebo více způsoby. Na tomto příkladu se žáci a studenti seznamují s postupem řešení. Příklad můžeme považovat za druhý význam úlohy.

(Kalhous, 2002)

2.3 Dělení matematických úloh

1) Existenční úlohy

V úlohách řešíme, zda výsledkem je prázdná nebo neprázdná množina.

Příklad: Má rovnice $7x - 12 = 25$ v množině přirozených čísel řešení?

Má rovnice $5z + 18 = 68$ v množině reálných čísel řešení?

2) Důkazové úlohy

Řešíme metodami, které mají svůj logický základ. Jedná se o organizaci poznatků a tvrzení v rámci některé deduktivní teorie.

**Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy
učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci**

Příklad: Dokažte, že trojúhelník ABC může mít tyto délky stran: $a = 5$ cm,
 $b = 8$ cm, $c = 12$ cm.

Dokažte, že platí $\sqrt{7 + \sqrt{7}} \geq 1 + \sqrt{7 - \sqrt{7}}$

3) Určovací úlohy

Jedná se o úlohy, které vyžadují nalezení, výpočet, sestrojení apod. všech matematických objektů daného druhu, které mají požadované vlastnosti. Obecný význam této úlohy je zapotřebí objevovat procesem abstrakce z jednotlivých případů, které jsou v matematické učebnici zastoupené.

Do matematických určovacích úloh patří: řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav, řešení geometrických konstrukčních úloh, výpočty derivací a limit funkcí, atd.

Patří k nejstarším matematickým úlohám. Při řešení těchto úloh vznikaly nové matematické pojmy, metody, zápisy a algoritmy.

Příklad: Řešte rovnici $x^2 - 5x + 6$ v reálných číslech.

Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $(x - 2) \cdot (5 - 3x) > 0$

Vypočítejte obsah obdélníku se stranami $a = 6$ cm a $b = 1,5$ cm.

Mezi všemi třemi typy úloh je úzký vzájemný vztah, např. při řešení určovací úlohy je součástí zkouška, jejímž obsahem je důkaz. Za základní typ úloh se obvykle pokládá úloha určovací, na kterou je možné převést ostatní typy matematických úloh. (Novák, 2003)

2.4 Tvorba matematické úlohy

Za matematickou úlohu můžeme považovat veškeré problémy, které mají žáci řešit. Jestliže před námi stojí řešení nějaké úlohy, nejprve ji musíme převést do matematického jazyka. Poté o úloze mluvíme jako o matematické úloze. V dnešní době se v hodinách matematiky počítají a řeší úlohy, které už jsou převedené do matematického jazyka, které se takto zformulované v praktickém životě neobjevují. Což představuje problém, protože žáci jsou sice schopni řešit takovéto matematické úlohy, dokonce i složitější, ale nedovedou si poradit s úlohami, které jsou v nematematickém tvaru. Nedovedou zadanou úlohu vytvořit v matematickém jazyce. Úlohy, které nejsou v určitém matematickém jazyce, se nazývají slovní úlohy. Hlavní zásada,

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

která platí pro slovní úlohy je ta, že nelze řešit slovní úlohu, dokud není převedená na matematickou úlohu.

V praxi se nejčastěji matematickou úlohou stává slovní úloha, která je převedena na rovnici, nebo soustavu rovnic, jejichž řešení lze provést pomocí následujících bodů:

- 1) Prostudovat pořádně podmínky úlohy.
- 2) Vytváření vztahů mezi vstupujícími veličinami.
- 3) Kterou veličinu brát jako neznámou.
- 4) Jaké další veličiny je nutné vyjádřit pomocí neznámých.
- 5) V jakém intervalu mohou neznámé nabývat hodnot (určení definičního oboru a oboru hodnot).

Po daných úvahách se můžeme pustit do řešení. Po vyřešení rovnice nebo soustavy rovnic je důležité provést zkoušku, která nám zajistí, že dané úvahy při řešení byly správné.

(Kalhous, 2002)

2.5 Řešení matematických úloh

Existuje několik možností řešení matematických úloh. První dvě metody řešení jsou algebraický a aritmetický způsob řešení. Algebraický způsob řešení spočívá v tom, že si řešitel sestaví správnou rovnici nebo soustavu rovnic a úlohu vyřeší. Naproti tomu aritmetický způsob řešení je vyřešení úlohy úsudkem nebo formou, „pokus omyl“. Vysvětlení způsobů řešení si ukážeme na příkladu.

Farmář měl na svojí farmě husy a ovce. Při přepočítávání svých stád zjistil, že celkový počet hlav zvířat je 1100 a noh 2400. Vypočítejte, kolik bylo na farmě hus a ovcí?

2.5.1 Algebraický způsob řešení

Sestavíme soustavu 2 rovnic o 2 neznámých. Husy nám nahradí neznámá x a ovce neznámá y .

$$x + y = 1100$$

$$2x + 4y = 2400$$

První rovnice nám vyjadřuje celkový počet hlav a druhá rovnice celkový počet noh.

Vyřešíme soustavu rovnic:

$$x + y = 1100 \quad / \cdot 2$$

**Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy
učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci**

$$\underline{2x + 4y = 2400}$$

$$2x + 2y = 2200 \quad / \cdot (-1)$$

$$\underline{2x + 4y = 2400}$$

$$-2x - 2y = -2200$$

$$\underline{2x + 4y = 2400}$$

$$2y = 200$$

$$\underline{y = 100}$$

Do první rovnice dosadíme za neznámou y a dopočítáme neznámou $x \Rightarrow x + 100 = 1100$
 $\Rightarrow x = 1100 - 100$. Neznámá $\underline{x = 1000}$.

Na farmě bylo 1000 hus a 100 ovcí.

2.5.2 Aritmetický způsob řešení

Jedná se o úsudkovou metodu. Budeme vycházet z předpokladu, že na farmě jsou jen husy. To by znamenalo, že by tam bylo 1100 hlav a 2200 noh. Na farmě je více noh, protože ovce mají 4 nohy. Pokud jednu husu vyměníme za ovci, zvětší se počet noh o 2. Kolik hus nahradíme, aby se počet noh zvětšil o $2400 - 2200 = 200$. V 200 je 2 obsažena 2 krát. To znamená $200 : 2 = 100$. Z toho plyne, že ovcí je 100 a hus 1000. (Kalhous, 2002)

Při řešení jednodušších příkladů může být aritmetický způsob vhodný. Řešitel se logicky nad problémem zamyslí. Využití tohoto řešení při složitějších úlohách je nevhodné. V těchto situacích je lepší pro řešitele užití algebraického způsobu.

Matematické úlohy lze řešit i podle toho, jaký druh myšlení převládá. Patří sem algoritmické (algoritmus) a heuristické metody řešení úloh.

2.5.3 Algoritmický způsob řešení

Řešení úloh je jednoznačně určeno vzorcem nebo pravidlem = algoritmus. Podle algoritmu se v určitém pořadí vykonává soustava elementárních kroků (operací), vedoucích k vyřešení všech úloh určitého typu.¹

Příklad:

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

Výpočet obsahu čtverce o straně $a = 6$ cm.

- velikost strany $a = 6$ cm
- vzorec pro výpočet obsahu čtverce: $S = a^2$
- správné použití jednotky obsahu: m^2 .

Pro algoritmus, jakožto postup řešení úloh, platí základní pravidla:

- a) Hromadnost – algoritmus není použitelný jen na jednu konkrétní úlohu, ale na libovolné úlohy, které jsou si podobné.
- b) Determinovanost – v každém kroku algoritmu musí být dáno, co přesně dělat.
- c) Rezultativnost – proces předepsaný algoritmem je konečný, skončí po konečném počtu kroků.

2.5.4 Heuristický způsob řešení

Jedná se o metodu, kdy je nejdůležitějším faktorem objevování. Tato metoda je využívána jako heuristický dialog. Učitel vede rozhovor se žáky, kterým pomáhá objevovat nové poznatky. Heuristická metoda se používá při řešení úloh, při kterých nestačí známé postupy a algoritmy. Tyto úlohy označujeme jako problémové úlohy. Řešení těchto úloh vyžaduje velké soustředění a čas.⁸

(Novák, 2003),

2.6 Tvorba úloh v matematických soutěžích

Soutěže matematického charakteru bývají přesně a důsledně připravované organizátory. Obsahují manuál pro uživatele, což jsou učitelé, kteří např. organizují školní kola soutěží (Matematická olympiáda, Matematický klokan, Pythagoriáda). Připravované testy jsou normativní, to znamená, že obsahují normu pro hodnocení výsledků soutěže, proto se jedná o standardizované testy. Úlohy v testech se nezaměřují jen na konkrétní učivo, ale na průřez žákovými vědomostmi a dovednostmi a na logické myšlení. Soutěžní úkoly jednotlivých kategorií odpovídají do jisté míry znalostem žáka z výuky, ale zároveň se zaměřují i na úroveň obecnějších charakteristik, jako je právě logické uvažování žáka, strategie řešení úlohy apod. Matematické soutěže bývají tvořené otevřenými testovými úlohami, ve kterých se

⁸ *Algoritmus*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://www.programovanie.kromsat.sk/prog-b/s15.htm>

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

prokáže schopnost žáka vytvořit řešení úlohy. V soutěžích, jako jsou korespondenční semináře, se vyskytují otevřené úlohy se širokou odpovědí. V těchto soutěžích se po žácích požaduje veškeré řešení příkladu, nestačí jen krátká odpověď. Je důležité, aby žák svoje řešení zapsal, protože i za postup řešení získává body.

Oproti tomu, Matematický klokan, je soutěž, která obsahuje uzavřené testové úlohy s výběrem jedné správné odpovědi. To může žáky při řešení takovýchto příkladů ovlivňovat. Při řešení uzavřených otázek může žák (student) postupovat několika způsoby. Jeden ze způsobů je ten, že příklad vyřeší a označí správnou odpověď, dalším postupem může být metoda „pokus omyl“ a tipne si odpověď, nebo do zadání úlohy dosazuje nabízené možnosti a tak hledá správnou odpověď a pak ji označí.

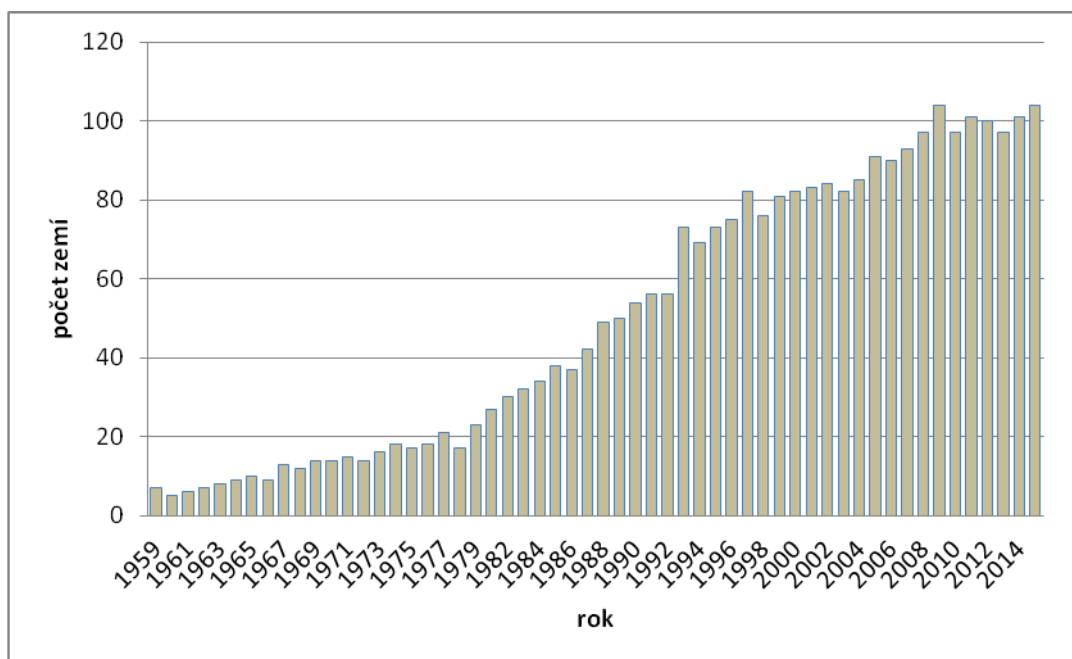
2.7 Mezinárodní matematická olympiáda MMO



Historie Mezinárodní matematické olympiády

Mezinárodní matematická olympiáda se poprvé uskutečnila v Rumunsku roku 1959 s účastí 7 zemí a 57 soutěžících. Z počátku byla *Matematická olympiáda* pořádána pro státy východní Evropy, ale později se rozšířila i do ostatních zemí a kontinentů, jak můžeme vidět na uvedeném grafu obr. 2. 7. 1

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci



Obrázek 2.7.1: Rostoucí zájem zemí o MMO v letech 1959-2015.

V dnešní době se *Matematické olympiády* účastní asi 100 zemí. Ani naše země nebyla výjimkou a *Matematických olympiád* se nejen účastnila, ale dokonce i několikrát *Matematickou olympiádu* pořádala. Bylo to v letech 1962 v Českých Budějovicích, 1971 v Žilině a 1984 v Praze. Za zmínku stojí, že od roku 1959 se neuskutečnil pouze jeden ročník *Matematické olympiády*, a to roku 1980 kvůli lidovým střetům v Mongolsku.⁹

2.8 Matematický klokan



Historie a účast řešitelů v České republice

Tato soutěž má své kořeny v Austrálii. Vznikla asi v roce 1980. Za jejího zakladatele je považován Peter O'Halloran. Do Evropy se tato soutěž dostala poprvé v roce 1991 a to do Francie. O rok později se Matematický klokan dostal do Polska. V České republice se této

⁹ *Mezinárodní matematická olympiáda*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://www.kdejinde.cz/cs/videogalerie/31.html>

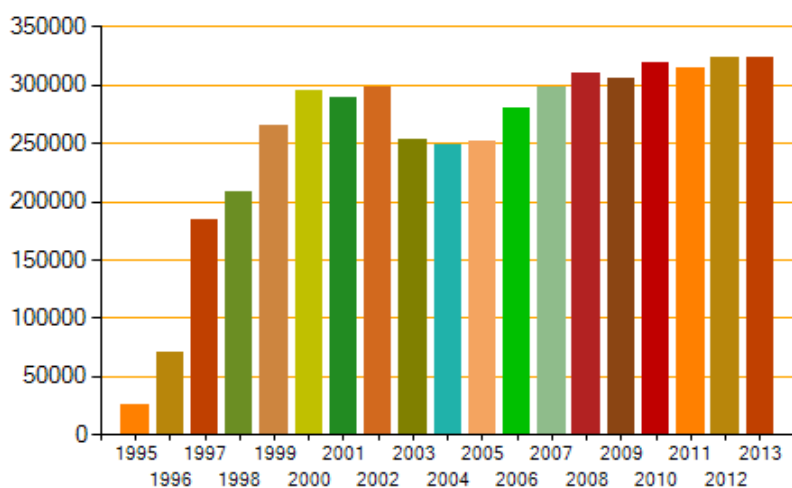
Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

soutěže mohou žáci a studenti účastnit od roku 1995 (v roce 1994 se tato soutěž konala jen v regionech severní Moravy).¹⁰

V roce 1993 vznikla Mezinárodní asociace Klokán bez hranic. Tato asociace má sídlo v Paříži. V této asociaci je zapojeno 71 zemí. Prezidentem asociace je Gregor Dolinar (Slovinsko), viceprezidentem jsou Meike Akveld (Švýcarsko), Andriy Dobosevych (Ukrajina) a Susanne Gennow (Švédsko). Tato asociace pořádá setkání, na kterých se připravuje další ročník soutěže *Matematického klokana*. Tato soutěž se koná ve všech zemích ve stejný den a stejnou hodinu.

V České republice pořádání soutěže *Matematický klokán* zajišťuje Jednota českých matematiků a fyziků ve spolupráci s Katedrou matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci a Katedrou algebry a geometrie Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci. Matematický klokán je zařazen mezi soutěže, které jsou plně hrazené z prostředků Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy.³

Účast řešitelů v České republice každým rokem stoupá. Nárůst účastníků je uveden v obrázku do roku 2013:



Obrázek 2.8.1: Účast českých řešitelů v soutěži *Matematický klokán*.

³ *A story of „Kangaroo of Mathematics“*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://www.aksf.org/history.xhtml>

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

Výběr soutěžních příkladů

Soutěžní příklady jsou připravovány na mezinárodních pracovních seminářích. Na těchto seminářích se setkávají zástupci pořadatelských zemí. Zástupci všech zemí předloží své příklady, které navrhuji do soutěže. Pracovní skupiny pro jednotlivé kategorie vyberou soutěžní příklady. Každá země má při realizaci soutěže právo vyměnit maximálně pět soutěžních příkladů, ve svém konečném zadání, které předkládá soutěžícím ve svojí zemi. Výměna soutěžních příkladů je povolena s ohledem na učební osnovy, které nejsou ve všech zemích stejné. Příklady, které jsou používány v soutěži *Matematický klokan*, jsou uzavřené otázky s možností výběru z pěti nabízených odpovědí.

Průběh a pravidla soutěže

Matematický klokan je určen pro žáky a studenty od 10 až 19 let. Jedná se o jednorázovou a individuální soutěž. Soutěž probíhá ve všech zemích zpravidla koncem měsíce března ve stejný den a hodinu. O datu konání se diskutuje na výše uvedených setkáních asociace. *Matematický klokan* je soutěž určená pro všechny žáky. Vznikla právě proto, aby se žákům a studentům ukázalo, jak může být matematika zajímavá a krásná. Do soutěže *Matematický klokan* se zařazují netradiční a zajímavé příklady, které podporují logické myšlení, tvořivost a prostorovou představivost. Jiný charakter má soutěž *Matematická olympiáda*, která se zaměřuje na nadané žáky a studenty. *Matematický klokan* je rozdělen do několika kategorií. V každé kategorii jsou soutěžícím předkládány tři skupiny soutěžních úloh (tři úrovně náročnosti - lehké, středně těžké a těžké). Jedná se o soutěžní úlohy za tři body, za čtyři body a za pět bodů. Na začátku řešení má každý uchazeč určitý počet bodů, aby při opravování nezískal záporné body. Při řešení za správnou odpověď získává řešitel 3, 4 nebo 5 bodů, podle toho do jaké kategorie obtížnosti příklad patří. Při špatné odpovědi se odčítá pouze 1 bod, ať už je příklad v kterékoliv kategorii obtížnosti. Jestliže řešitel nezodpoví (nezaškrtně) žádnou odpověď nezískává, ani neztrácí bod. Své odpovědi řešitelé zaškrťávají do karty odpovědí, viz obrázek 2.8.2

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

KARTA ODPOVĚDÍ

3 body						4 body						5 bodů					
	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1						9						17					
2						10						18					
3						11						19					
4						12						20					
5						13						21					
6						14						22					
7						15						23					
8						16						24					

Kategorie: _____

Jméno: _____

Příjmení: _____

Třída: _____

Získal(a) celkem _____ bodů.

Obrázek 2.8.2. Karta odpovědí *Matematického klokana*.

Po ukončení soutěže učitelé opraví a vyhodnotí v každé kategorii nejúspěšnější řešitele. Poté se dané výsledky odesílají do Olomouce na Univerzitu Palackého a zde se vyhodnocují statistické výsledky za celou Českou republiku. Nejlepší řešitelé v jednotlivých kategoriích jsou odměněni diplomy a knižními odměnami. Každý účastník obdrží osvědčení o účasti:



Obrázek 2.8.3 Osvědčení pro účastníka.

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

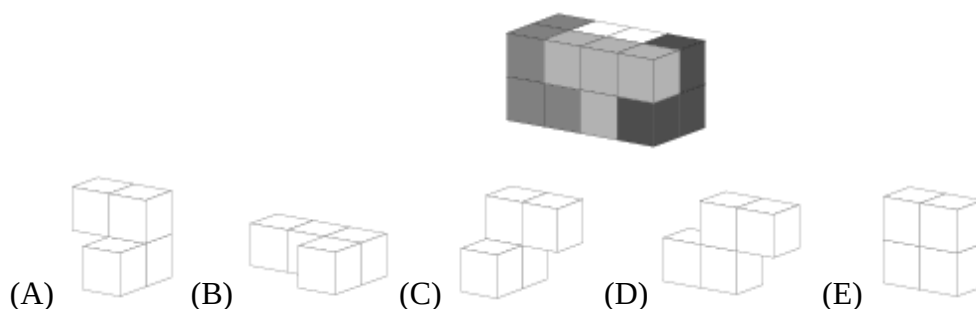
Statistické výsledky současně se zadáním soutěžních příkladů a správnými odpověďmi jsou uveřejněny ve sborníku *Matematického klokana* v příslušném ročníku, který vydává JČMF a bývá rozesílán jednotlivým oblastním důvěrníkům této soutěže.¹¹

2.9 Úlohy pro rozvoj prostorové představivosti žáků

Velmi náročné jsou úlohy, které vyžadují prostorovou představivost. Rovněž tuto schopnost lze u žáků a studentů rozvíjet. V této kapitole uvádíme několik ukázek úloh, které jsou zaměřené na rozvíjení prostorové představivosti žáků a studentů.

Úloha č. 1

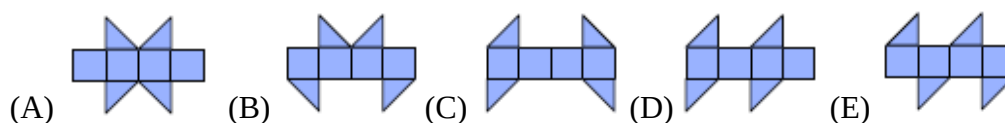
Hranol na obrázku se skládá ze čtyř částí. Každá část je tvořena 4 krychlemi stejné barvy. Určete tvar bílé části?



Správný výsledek: D

Úloha č. 2

Jednu z následujících „sítí“ nelze poskládat do tvaru krychle. Která to je?



Správný výsledek: C

Úloha č. 3

Na obrázku vidíš stavbu při pohledu shora. Čísla udávají počet krychlí, které stojí nad sebou. Co uvidíš, když se podíváš na stavbu zezadu?

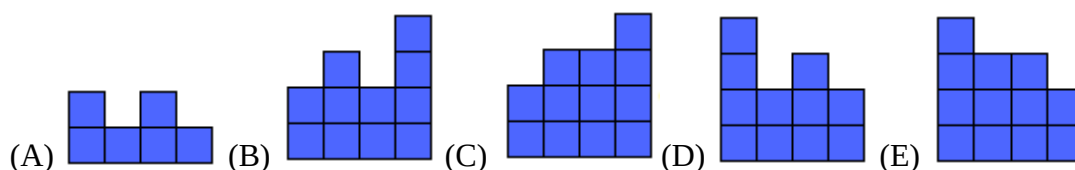
¹¹ A story of „Kangaroo of Mathematics“. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://www.aksf.org/history.xhtml>

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

vzadu

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

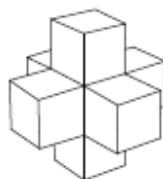
vpředu



Správný výsledek: C

Úloha č. 4

Jiří postavil model na obrázku ze sedmi jednotkových krychlí. Kolik takových krychlí musí Jiří k tomuto modelu přidat, aby vytvořil krychli s hranami o délce 3 cm?

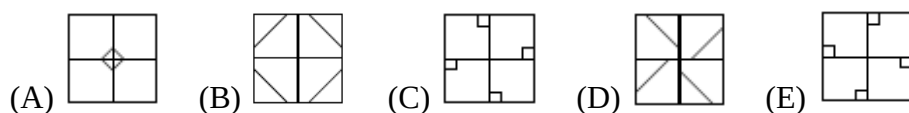
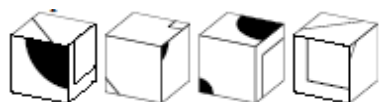


- (A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 20

Správný výsledek: E

Úloha č. 5

Máme čtyři shodné krychle jako na obrázku vlevo. Krychle k sobě přiložíme tak, že se na jedné stěně objeví velký černý kruh (viz obrázek vpravo). Co můžeme vidět na protilehlé stěně?



Správný výsledek: A

**Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy
učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci**

Závěr

Prostorovou představivost potřebují pro svou práci především technici, architekti, projektanti, ale ke správnému vnímání světa kolem nás potřebují prostorovou představivost všichni lidé. Prostorová geometrie je vhodnou metodou pěstování prostorové představivosti u žáků a studentů.

Reálný svět, ve kterém žijeme, jehož jsme součástí, je trojrozměrný prostor. Fyzika, jako vědní disciplína, k tomuto trojrozměrnému prostoru přiřazuje čtvrtý rozměr - čas. Děti se již v předškolním věku učí prostorové orientaci, osvojují si základní poznatky o tvaru a velikosti těles. Různými pohyby v prostoru lze dosáhnout změny vzájemné polohy objektů. Orientovat se v jisté míře v prostorových vztazích musí každý (úměrně složitosti způsobu života).

Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci

Literatura

- [1] KALHOUS, Z. *Školní didaktika*. Praha: Portál, 2002, 448 s. ISBN 80-717-8253-X.
- [2] KVĚTOŇ, Pavel. *Kapitoly z didaktiky matematiky*. Ostrava: Pedagogická fakulta, 1982, 242 s. - Květoň 1982
- [3] ODVÁRKO, Oldřich, Jaroslav ŠEDIVÝ a Emil CALDA. *Metody řešení matematických úloh*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. ISBN 80-042-0434-1. - Odvárko a spol 1990
- [4] NOVÁK, B.: Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky. Olomouc, PdF, 2003.
- [5] NOVÁK, Bohumil a Anna STOPENOVÁ. *Slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ*. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1993. ISBN 80-706-7294-3. - Novák stopenová 1993
- [6] BÁRTEK, K., DOFKOVÁ, R. a kol. *Reflexe vzdělávacích potřeb učitelů matematiky jako východisko jejich profesního rozvoje*. Autor kapitoly: NOVÁK, B. *Badatelsky orientovaná výuka jako jeden z nástrojů motivace (nejen) ve výuce matematiky*. V tisku.
- [7] MUSILOVÁ, Marcela. *Pedagogická diagnostika: cvičebnice*. 2. Olomouc, 2015, 56 s. - Musilová 2015
- [8] *Algoritmus*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://www.programovanie.kromsat.sk/prog-b/s15.htm>
- [9] *Didaktické testy*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/pedagogika/dopl_texty/Didakticke%20testy.pdf
- [10] *Didaktické testy*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://www.ceremat.cz/didakticke-testy-1404034141.html>
- [11] *Vlastnosti didaktických testů*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://cvicebnice.ujep.cz/cvicebnice/FRVS1973F5d/data/Snimek36_text.html
- [12] *Metodologie vytváření testu*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: https://fim.uhk.cz/oliva/tvorba_vedeni/REKAP-www/M1.pdf
- [13] *Druhy didaktických testů*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://fim.uhk.cz/oliva/tvorba_vedeni/rekap-www/modul1/02-01-2.html
- [14] *Zásady správné tvorby, použití a hodnocení didaktických testů v přípravě budoucích učitelů*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.pf.ujep.cz/obecna-didaktika/pdf/Didakticke_testy.pdf
- [15] CHRÁSKA, Miroslav. *Didaktické testy: příručka pro učitele a studenty učitelství*. Brno: Paido, 1999. Edice pedagogické literatury. ISBN 80-859-3168-0. - CHRÁSKA, M. Didaktické testy. Praha: Paido, 1999.
- [16] *Hry a soutěže v matematice na 1. stupni ZŠ*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/72156/pedf_m/Hry_a_souteze_v_matematice_na_1_stupni_ZS.pdf
- [17] *Mezinárodní matematická olympiáda*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Mezin%C3%A1rodn%C3%AD_matematick%C3%A1_olympi%C3%A1da#Historie

**Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy
učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci**

- [18] *History*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://imof.co/about-imo/history/>
- [19] *International Mathematical Olympiad*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://www.imo-official.org/organizers.aspx?column=number&order=desc>
- [20] *Mezinárodní matematická olympiáda*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://www.jcmf.cz/?q=cz/node/616>
- [21] *Mezinárodní matematická olympiáda*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://www.kdejinde.cz/cs/videogalerie/31.html>
- [22] *Zprávy*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://mfi.upol.cz/files/24/2405/mfi_2405_391_393.pdf
- [23] *Olympiáda pro ZŠ*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly>
- [24] *Olympiáda pro SŠ*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://mo.webcentrum.muni.cz/cs/olympiada-pro-stredni-skoly>
- [25] *Krajská komise MO-Olomouc*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://www.kag.upol.cz/mo/>
- [26] *Organizační řád Matematické olympiády*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
http://mo.webcentrum.muni.cz/media/65913/organiza_n____d_matematick__olympi_dy_2014.doc
- [27] *Matematický klokan*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://www.gbn.cz/matematicky-klokan>
- [28] *Matematický klokan*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://www.matematikahb.unas.cz/klokan.html>
- [29] *Matematický klokan*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://www.matematika.webz.cz/ostatni/?s=klokan>
- [30] *Matematický klokan*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://www.glouny.cz/klokan/>
- [31] *Přírodovědný klokan*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://www.kag.upol.cz/prirodovednyklokan/info.html>
- [32] *Our History*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://www.mathkangaroo.org/mk/history.html>
- [33] *Matematický klokan*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://www.suma.jcmf.cz/souteze/matematicky-klokan/>
- [34] *Běh s klanem*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <https://www.jcmf.cz/?q=cz/node/1033>
- [35] *A story of „Kangaroo of Mathematics“*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://www.aksf.org/history.xhtml>
- [36] *Countries*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://www.aksf.org/countries.xhtml>
- [37] *Kangourou sans Frontières Board Members (2015)*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://www.aksf.org/board.xhtml>
- [38] *Informace o soutěži*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://www.matematickyklokan.net/info.php>
- [39] *Pravidla soutěže Matematický klokan – kategorie Cvrček*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
http://www.matematickyklokan.net/Pravidla/Pravidla_Cvrcek.pdf

**Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy
učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci**

- [40] *Pravidla soutěže Matematický klokan – kategorie Klokánek, Benjamín, Kadet.* [online]. [cit. 2016-06-18].
Dostupné z: http://www.matematickyklokan.net/Pravidla/Pravidla_Klokanek-Benjamin-Kadet.pdf

**Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy
učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci**

- [41] *Pravidla soutěže Matematický klokan – kategorie Junior a Student*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
http://www.matematickyklokan.net/Pravidla/Pravidla_Junior-Student.pdf
- [42] *Informace k soutěži Přírodovědný klokan*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
http://www.kag.upol.cz/prirodovednyklokan/info_pravidla.pdf
- [43] *Pythagoriáda*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://www.talentovani.cz/pythagoriada>
- [44] *Pythagoriáda*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://znv.nidv.cz/talentcentrum/souteze/pythagoriada>
- [45] *Pythagoriáda*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://www.zstrhovystepanov.cz/word/2016/pp.pdf>
- [46] *Péče o matematické talenty v České republice*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
http://esfmoduly.upol.cz/texty/pece_o_m_tal.pdf
- [47] *Vznik Pikomatu*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://pikomat.mff.cuni.cz/onas/historie>
- [48] *Úvodní informace*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://brkos.math.muni.cz/index.php?s=info>
- [49] *MathRace*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://brkos.math.muni.cz/mathrace/index.php>
- [50] *Pravidla*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://kokos.gmk.cz/o-kokosu/pravidla>
- [51] *Pravidla koma*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://kokos.gmk.cz/o-kokosu/koma-pravidla>
- [52] *Matematický korespondenční seminář*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://mks.mff.cuni.cz/info/info.php>
- [53] *Náboj*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<https://math.naboj.org/rules.php>
- [54] *Korespondenční seminář a časopis MFF UK*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://mam.mff.cuni.cz/co-je-MaM/uvod/>
- [55] *Matematický orienták*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://mks.gjkt.cz/matematicky-orientak/>
- [56] *Archív*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://pikomat.mff.cuni.cz/archiv>
- [57] *Tábory Pikomatu MFF UK*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://pikomat.mff.cuni.cz/tabor>
- [58] *Soustředění Pikomatu MFF UK*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://pikomat.mff.cuni.cz/soustredeni>
- [59] *Setkání Pikomatu*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://pikomat.mff.cuni.cz/setkani>
- [60] *Akce*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://kokos.gmk.cz/akce>
- [61] *65. ročník matematické olympiády*. [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z:
<http://mo.webcentrum.muni.cz/media/2603411/z65i.pdf>

**Podpůrné aktivity směřující ke zkvalitnění pregraduální přípravy
učitelů na Univerzitě Palackého v Olomouci**

- [62] *Úlohy domácí části 1. kola 65. ročníku matematické olympiády pro žáky středních škol.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://mo.webcentrum.muni.cz/media/1760677/abc65i.pdf>
- [63] *Úlohy domácí části 1.kola kategorie A.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://mo.webcentrum.muni.cz/media/2046298/a65i.pdf>
- [64] *Úlohy domácí části 1.kola kategorie B.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://mo.webcentrum.muni.cz/media/2602803/b65i.pdf>
- [65] *Úlohy domácí části 1.kola kategorie C.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: <http://mo.webcentrum.muni.cz/media/2602804/c65i.pdf>
- [66] *Matematický klokan 2015.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/Sborniky/sbornik_klokan_2015.pdf
- [67] *Pythagoriáda 38.ročník.* [online]. [cit. 2016-06-18]. Dostupné z: http://www.zshorakhk.cz/files/tinymce/matematika/souteze/14_15/Pythagoriada_2015_skolni_kola.pdf