

Mezipředmětové vztahy s matematikou - matematika kolem nás

Zlatý řez a Fibonacciho posloupnost

(průvodce studiem)

David Nocar

„Velkou knihu přírody mohou číst jen ti, kteří rozumějí jazyku, jímž byla napsána.

A tímto jazykem je matematika.“

Galileo Galilei

Průvodce studiem

Milí studenti, milí čtenáři tohoto studijního materiálu, v rámci tohoto studijního textu se seznámíte s poměrně častým výskytem jednoho zajímavého čísla v přírodě. Toto číslo také úzce souvisí s dalšími velmi známými čísly, ukážeme si souvislost, a vyjadřuje poměr zlatého řezu, proto je někdy nazýváno „zlaté číslo“, „zlatý řez“ nebo někdy též „božská proporce“.

Ukážeme si některé konkrétní příklady této proporce v přírodě. Poukážeme tak na jednu z možností interdisciplinárního přístupu ve vzdělávání. Daná problematika souvisí s různými vzdělávacími oblastmi Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání - Matematika a její aplikace, Člověk a příroda, Člověk a jeho svět ...

Cíle:

Po prostudování tohoto studijního textu:

- budete obeznámeni s číslem φ („zlatým řezem“ /*sectio aurea*/, „božskou proporcí“),
- připomenete si známá čísla Fibonacciho posloupnosti,
- pochopíte souvislost mezi čísly Fibonacciho posloupnosti a číslem φ ,
- se seznámíte se stručnou historií „zlatého řezu“,
- budete schopni vypočítat hodnotu „zlatého řezu“,
- budete znát příklady výskytu a uplatnění se „zlatého řezu“ a s tím souvisejících čísel Fibonacciho posloupnosti kolem nás,
- budete mít náměty do výuky v rámci mezipředmětových vztahů matematiky – přírodopisu.

Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Uvedení do problematiky

Poměr zlatého řezu je znám již od starověku. Tuto proporci můžeme nalézt nejen na lidských výtvorech, jako jsou stavby, sochy, obrazy, fotografie ale také v přírodě samotné jak na zástupcích z říše rostlin, tak z říše živočichů včetně člověka. Většinou se s tímto tématem setkávají až studenti na vysoké škole. Toto téma by ale jistě bylo zajímavé i pro žáky základních a středních škol, i když z hlediska matematického spíše pro žáky střední školy, ale z hlediska mezipředmětových vztahů i pro žáky základní školy.

Historie zlatého řezu

Již před 2300 lety se řecký matematik a geometr Euklides zabýval úlohou, jak rozdělit úsečku tak, aby její menší část byla ve stejném poměru k větší části jako větší část k celé úsečce. Úloha z druhé Euklidovy knihy Základů zní: „Rozděľ úsečku na dva díly tak, aby obdélník, jehož jedna strana je celá úsečka a druhá strana je jeden z dílů, měl stejný obsah jako čtverec nad druhým dílem.“ Tato úloha byla na svou dobu velice obtížná. Ve středověku byl zlatý řez považován za dílo Boha: představoval údajně dokonalost božího stvoření. I v období renesance, která se opírala o antickou kulturu, byl pro matematiky zlatý řez ztělesněním božské logiky, byl nazýván „božskou proporcí“ (*divina proportio*). Luca Pacioli, renesanční matematik, je autorem pojednání nazvaného "O božském poměru" (*De Divina Proportione*, 1509), které obsahuje soubor příkladů výskytu poměru zlatého řezu v rovinných obrazcích i v tělesech. Také ve svém spise z roku 1528 německý malíř Albrecht Dürer rozvinul některé teoretické problémy nauky o proporcích. I zde se setkáváme s řadou zlatých řezů úseček a zlatých obdélníků. V následujícím století zájem o zlatý řez ještě pokračoval převážně mezi mistry výtvarného umění, ale posléze se zájem o zlatý řez začal vytrácet. Teprve až 20. století spojené s rozvojem moderních matematických disciplín vymezilo předčasně uzavřené problematice zlatého řezu v rámci matematiky opět své místo a i dnes v 21. století má zlatý řez konstrukční užití jak v planimetrii, tak ve stereometrii. [1]

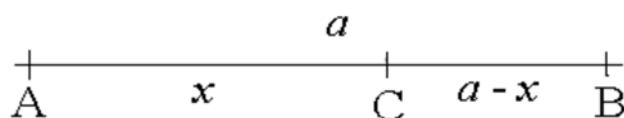
Pojmenování „zlatý řez“ nepochází hned od Euklida. Euklides tuto proporci rozděľující úsečku nazýval rozdělení „v krajním a středním poměru“. Označení „zlatý řez“ použil poprvé německý matematik Martin Ohm (bratr slavného fyzika Georga Simona Ohma, po němž je pojmenován Ohmův zákon a jednotka elektrického odporu). Jako symbol pro hodnotu zlatého řezu se v odborné matematické literatuře používá řecké písmeno τ (tau). Na počátku 20. století však americký matematik Mark Barr dal tomuto poměru označení ϕ (fi), jakožto počáteční řecké písmeno Feidia (490 – 430 př. n. l.), velkého řeckého sochaře, protože ve svých dílech až puntičkářsky přesně a často zlatý řez používal. [6]

Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Výpočet hodnoty zlatého řezu – číslo φ

Jak již bylo uvedeno v úvodní části o historii zlatého řezu, hledáme na úsečce takové místo (bod), který nám danou úsečku rozdělí tak, že její menší část je k větší části ve stejném poměru jako větší část k celé úsečce. Vyřešením této úlohy sice nalezneme bod, který nám zadanou úsečku rozdělí zlatým řezem, ale vyčíslením tohoto poměru bychom dostali převrácenou hodnotu „zlatého čísla“. Proto si zadání této historické úlohy přeformulujeme na následující znění.

Úloha: Rozdělme zadanou úsečku AB bodem C na dvě nestejně dlouhé části tak, aby poměr délky celé úsečky ku délce její větší části byl stejný jako poměr délky její větší části ku délce části menší (Obr. 1).



Obrázek 1. Úsečka AB rozdělená bodem C ve zlatém řezu

Zapíšeme-li si matematicky zadanou úlohu v souladu s označením uvedeném na obrázku, dostáváme následující rovnici: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$. Tento poměr se většinou značí řeckým písmenem

φ a tedy hodnota čísla $\varphi = \frac{a}{x}$ popř. $\varphi = \frac{x}{a-x}$. Pro výpočet hodnoty „zlatého čísla“ φ musíme

nejprve vypočítat neznámou x . Jelikož na délce původní úsečky nezáleží, můžeme na její velikost nahlížet jako na nějakou jednotku, proto pro výpočet budeme uvažovat $a=1$. Po

dosazení tedy dostáváme rovnici: $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$. Za předpokladu, že $x \neq 0 \wedge x \neq 1$ (x představuje

část úsečky délky 1 $\Rightarrow x > 0 \wedge x < 1$, čímž jsou podmínky splněny) jednoduchými ekvivalentními úpravami dostáváme kvadratickou rovnici: $x^2 + x - 1 = 0$. Pomocí známého vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice dostáváme:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Jelikož výsledná hodnota x představuje délku části původní úsečky, uvažujeme pouze

o kladném řešení, proto $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Nyní tedy můžeme vypočítat hodnotu čísla φ např. ze vztahu $\varphi = \frac{a}{x}$, kde pro $a=1$ vlastně vyjadřujeme převrácenou hodnotu vypočítaného čísla x tzn.

$$\varphi = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Hodnota „zlatého řezu“ neboli někdy též nazývaná hodnota „božské proporce“ je tedy rovna $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Jelikož $\sqrt{5}$ je iracionální číslo, je tudíž i číslo φ iracionální číslo. Jeho přibližná hodnota vyjádřená desetinným číslem je: 1,6180339887498948482045868343656381177203091798...

Pro naši potřebu se nadále omezíme pouze na přibližnou hodnotu $\varphi \doteq 1,618$.

Pro zájemce

Výše jsme si hodnotu zlatého řezu vypočítali. Známe tedy, v jakém poměru bod C zadanou úsečku AB rozdělí. Pokud bychom chtěli zadanou úsečku rozdělit v poměru zlatého řezu geometrickou konstrukcí, lze postupovat několika známými postupy, např. viz [7].

Průvodce studiem

Již jsme si vysvětlili „zlatý řez“ a vyčíslili jsme si jeho hodnotu jako iracionální číslo označované symbolem φ . Nyní si připomeneme čísla Fibonacciho posloupnosti, abychom si mohli ukázat souvislost těchto čísel s číslem φ .

Fibonacci a Fibonacciho posloupnost



Leonardo Fibonacci, vlastním jménem Leonardo Pisano Bigollo, známý také jako Leonardo of Pisa, Leonardo z Pisy, Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo či Leonardo Bonacci, byl největším evropským matematikem středověku. Narodil se okolo roku 1175 v italské Pise a zemřel kolem roku 1240.

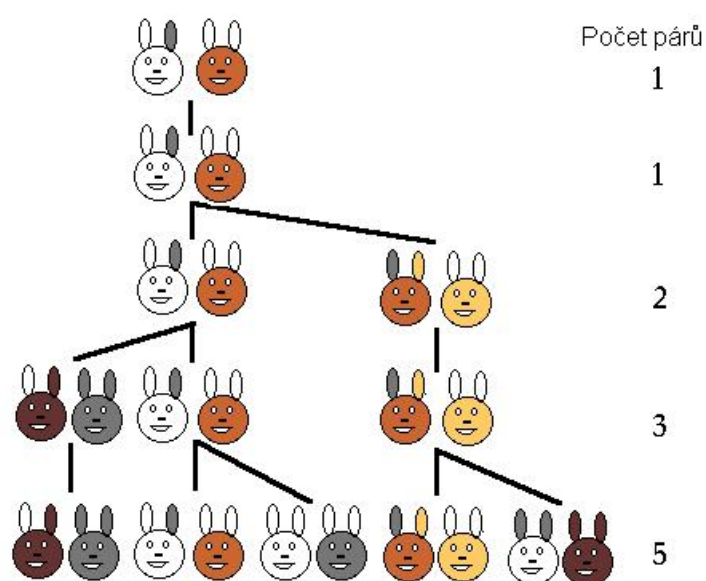
V roce 1202 píše Leonardo svou nejúspěšnější knihu, kterou nazval „*Liber Abaci*“ („Kniha o abaku“).

Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

V této knize se objevila úloha následujícího znění:

Kdosi umístil pár králíků na místě ze všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se narodí v průběhu jednoho roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede měsíčně na svět jeden pár a že králíci počinají rodit ve dvou měsících svého věku. S případy uhynutí se nepočítá. První králíci umístění do ohrady jsou čerstvě narození.

Pro lepší představu se podíváme na obrázek a dané počty si zapíšeme do tabulky:



Obrázek 2. Schéma množení králíků dle zadané úlohy

Počet párů v měsíci	Leden	Únor	Březen	Duben	Květen	Červen	Červenec	Srpen
dospělí	0	1	1	2	3	5	8	13
mláďata	1	0	1	1	2	3	5	8
celkem	1	1	2	3	5	8	13	21

Tabulka 1. Narůstající počet párů králíků dle zadané úlohy

V 19. století si této úlohy všiml francouzský matematik Francois Edouard Lucas (1842 – 1891) při sestavování své knihy z oblasti rekreační a zábavné matematiky. Posloupnost 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., která se objevila při řešení Fibonacciho úlohy o králících, nazval Lucas **Fibonacciho posloupnost** a její členy Fibonacciho čísla.

Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Fibonacciho posloupnost lze zadat rekurentně následujícím vztahem:

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1 \\ 1 & \text{pro } n = 2 \\ F_{n-2} + F_{n-1} & \text{jinak} \end{cases}$$

Fibonacciho posloupnost je tedy nekonečná posloupnost přirozených čísel definovaných jako součet dvou předchozích čísel, přičemž první dva členy jsou rovny jedné.

Jinak lze rekurentně danou posloupnost $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ zapsat vztahem:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n; \quad n \in \mathbb{N}, F_1 = 1, F_2 = 1.$$

Pro zájemce

Fibonacciho posloupnost $\{F_n\}$ lze také definovat explicitně vzorcem pro n -tý člen:

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}},$$

častěji se ale můžete setkat s upraveným vztahem v následující podobě:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

který objevil v 19. století francouzský matematik Jacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856), proto se tento vztah označuje jako Binetův vzorec.

Zajímavé na tomto vztahu je to, že se v něm objevuje hodnota zlatého řezu $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Odvození explicitního vyjádření n -tého členu Fibonacciho posloupnosti např. viz [3].

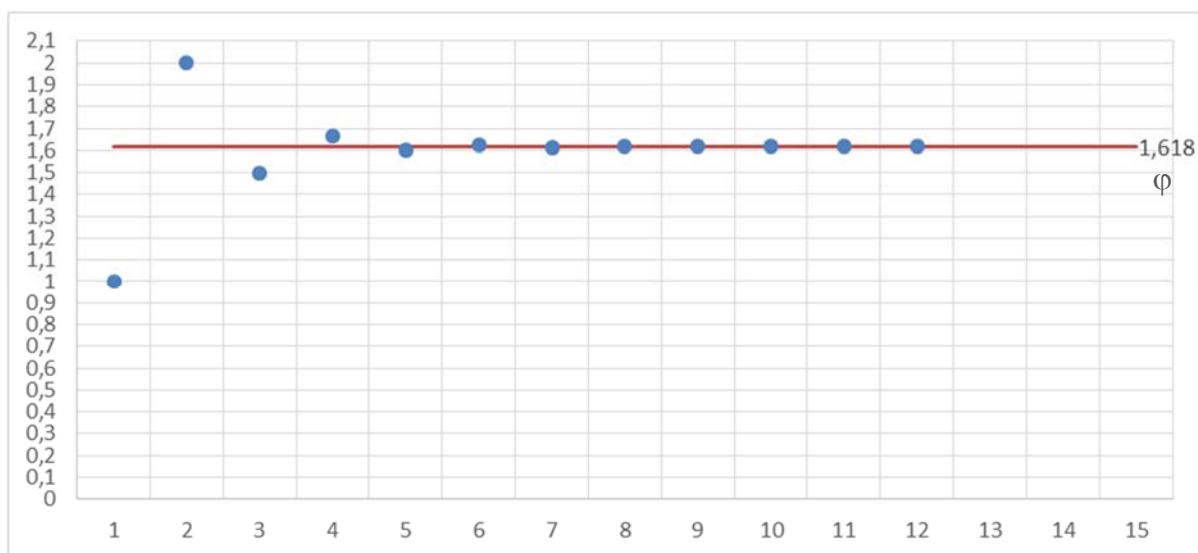
Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Souvislost Fibonacciho posloupnosti s hodnotou zlatého řezu φ je především v konvergenci podílu dvou sousedních čísel F_n, F_{n+1} k hodnotě zlatého řezu φ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

$\frac{1}{1} = 1,000\dots$	$\frac{2}{1} = 2,000\dots$	$\frac{3}{2} = 1,500\dots$	$\frac{5}{3} = 1,666\dots$
$\frac{8}{5} = 1,600\dots$	$\frac{13}{8} = 1,625\dots$	$\frac{21}{13} = 1,615\dots$	$\frac{34}{21} = 1,619\dots$
$\frac{55}{34} = 1,617\dots$	$\frac{89}{55} = 1,618182\dots$	$\frac{144}{89} = 1,617978\dots$	$\frac{233}{144} = 1,618056\dots$...

Již nyní, když porovnáme výsledné podíly s číslem φ , vidíme, že výsledná hodnota podílu je jednou menší než φ a podruhé zas větší než φ . Tyto hodnoty podílu tedy oscilují kolem hodnoty φ a s každou další hodnotou podílu se jí stále více blíží. Neboli můžeme říci, že posloupnost diferencí získaných podílů od čísla φ představuje alternující posloupnost konvergující k nule.



Graf 1. Konvergence hodnot podílu sousedních čísel $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ Fibonacciho posloupnosti

Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Kde se tedy v přírodě můžeme setkat s takovými podíly po sobě jdoucích Fibonacciho čísel blízkými se hodnotě čísla $\varphi \doteq 1,618$?

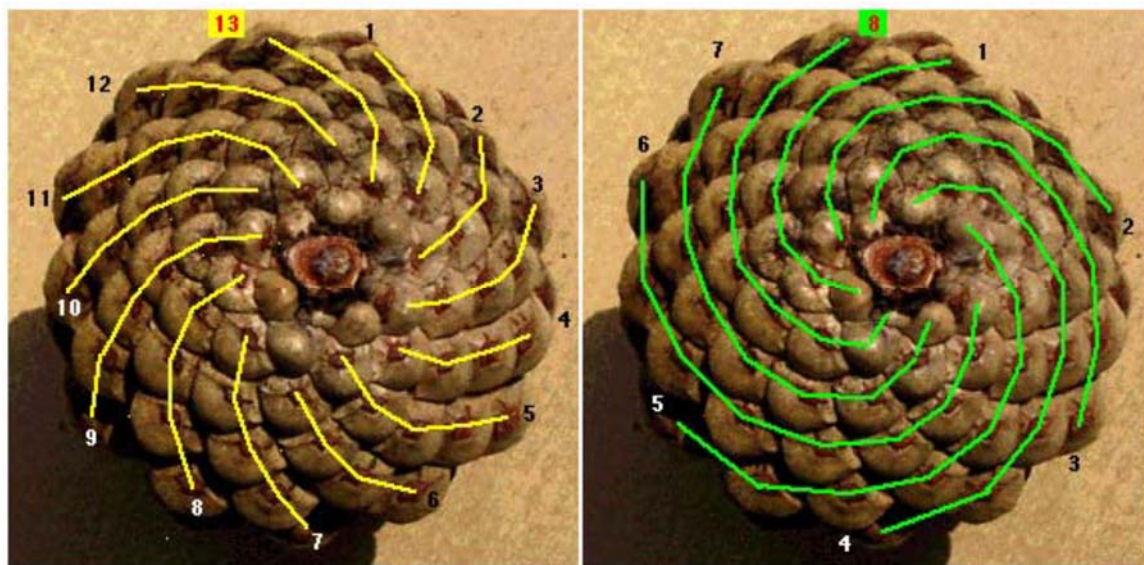
Například květy v úboru slunečnice a posléze semena jsou uspořádány ve spirálách jdoucích jak po směru hodinových ručiček, tak proti směru (Obr. 3). Nejobvyklejším vzorem je 55 spirál jdoucích jedním směrem a 34 spirál jdoucích opačným směrem. Byly pozorovány i slunečnice s poměrem počtu spirál $\frac{89}{55}$, $\frac{144}{89}$ a dokonce i $\frac{233}{144}$. Vždy se jedná o poměr dvou sousedních Fibonacciho čísel.



Obrázek 3. Uspořádání květů posléze semen slunečnice

U šišek borovic jsou jednotlivé šupiny uspořádány do spirál, vždy do 13 spirál směřujících zleva doprava a 8 spirál směřujících zprava doleva (Obr. 4). U smrkových šišek je to podle velikosti 8 nebo 13 spirál v jednom směru a 5 nebo 8 spirál v opačném směru. Opět se jedná o poměr dvou sousedních Fibonacciho čísel.

Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci



Obrázek 4. Uspořádání šupin u šišky borovice

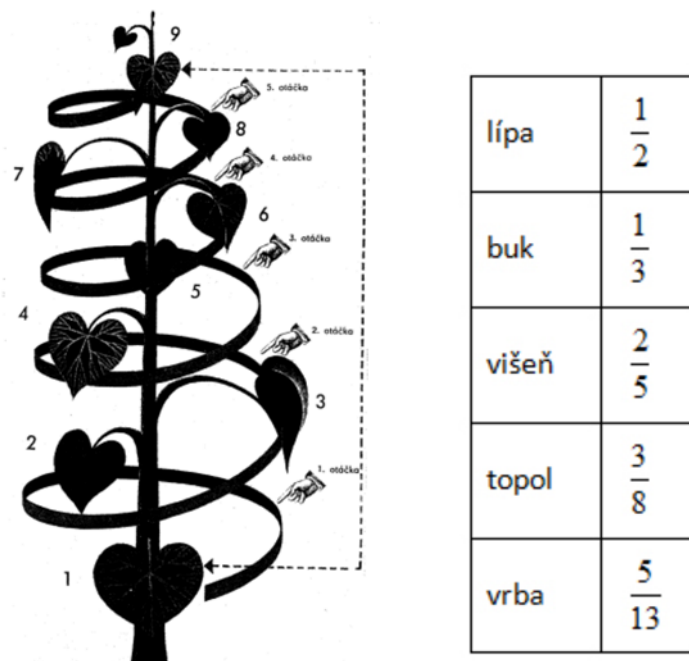
Z oblasti botaniky si ještě ukážeme zákonitosti růstu listů na stoncích některých konkrétních druhů rostlin. Uspořádáním listů na stonku se zabývá fylotaxe.

Fakt, že se listy rostlin řídí určitým schématem, zpozoroval již ve starověku Theofrastos (373 - 288 př. n. l.) a popisuje jej ve svém spise *De causis plantarum* (*O rostlinách*). K podobnému závěru dospěl i Plinius Starší (24 - 79 n. l.) ve svém díle *Naturalis historia* (*Historie přírody*). Výzkum fylotaxe pokročil až v 15. století, kdy si tohoto uspořádání všiml Leonardo da Vinci (1452 - 1519) a německý astronom Johannes Kepler (1571 – 1630).

Pokud vyrůstají listy na stoncích a větvích jednotlivě, vyrůstá každý další list nad předchozím listem otočený o určitý úhel. Tento úhel, který je pro každou rostlinu charakteristický, se vyjadřuje ve tvaru zlomku, který udává, jakou část kružnice (jedné otáčky) daný úhel vytíná (Obr. 5).

Tabulka uvádí příklady těchto úhlů pro některé konkrétní druhy rostliny.

Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci



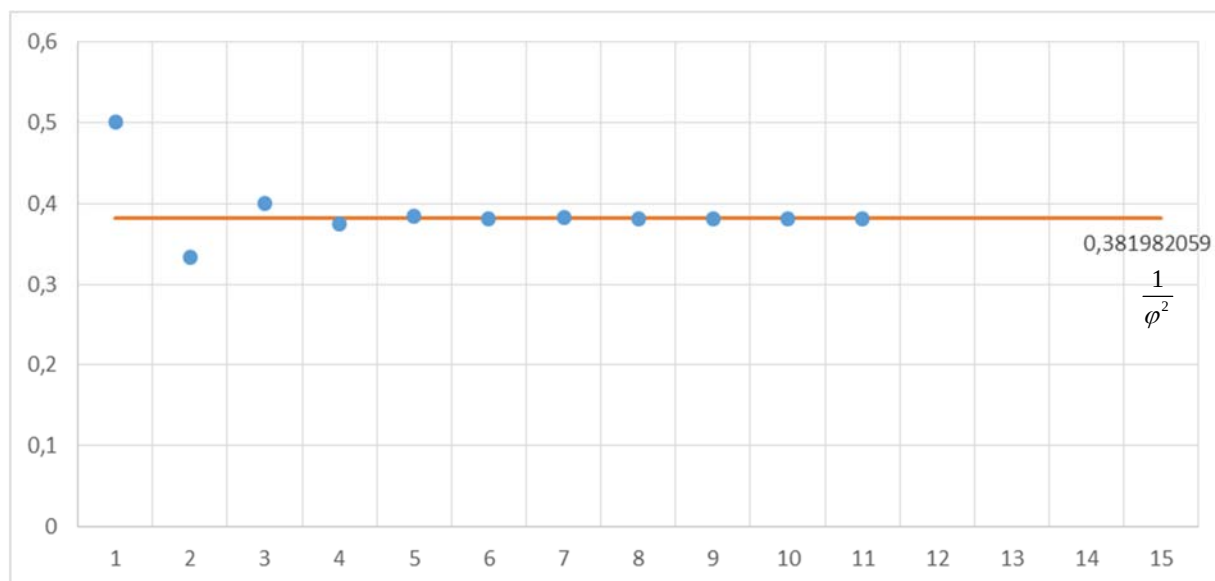
Obrázek 5. Šroubovitý růst listů na rostlinách

U takto získaných zlomků je překvapující ta skutečnost, že se vždy jedná o poměr jednoho členu Fibonacciho posloupnosti k dalšímu členu Fibonacciho posloupnosti, který se nachází v řadě o dvě místa dál. $\left(\frac{F_n}{F_{n+2}} \right)$.

Souvislost s číslem φ vychází obecně z podílu dvou členů Fibonacciho posloupnosti. Jelikož již víme, že podíl dvou sousedních členů Fibonacciho posloupnosti konverguje k hodnotě zlatého řezu, lze stejně tak ukázat, že pokud si získané zlomky seřadíme tak jak máme uvedeno v tabulce (hodnotu čitatele i jmenovatele vzestupně), a pokračovali bychom v takovéto posloupnosti, konvergují hodnoty těchto podílů k převrácené hodnotě druhé mocniny čísla φ . $\left(\frac{1}{\varphi^2} \right)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+2}} = \frac{1}{\varphi^2}$$

Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

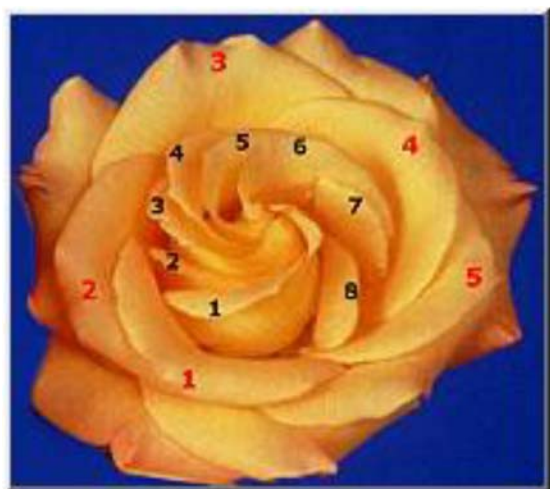


Graf 2. Konvergence hodnot podílu čísel $\frac{F_n}{F_{n+2}}$ Fibonacciho posloupnosti

Jako poslední příklad z rostlinné říše si rozebereme květ růže. Růže je často chápána jako symbol přírodní symetrie, harmonie, lásky a křehkosti. Indický básník a filozof Rabíndranáth Thákur (1861-1941) v knize *Religion of Man (Náboženství člověka)* píše: „*Nejasně cítíme, že růží promlouvá k našim srdcím jazyk lásky.*“ [6]

Při rozboru květu růže, zjistíme nejen počty jednotlivých korunních lístků (květních plátků), ale také jejich uspořádání, jak se jednotlivé plátky v květu navzájem překrývají. Bylo zjištěno, že rozmístění jednotlivých plátků je dáno přesným pravidlem spočívajícím na zlatém řezu. Pro zjištění přesné pozice jednotlivých plátků růže je nutné květ rozebírat plátek po plátku. Tím zjistíme počty zmenšujících se plátků každé celé otočky. Obr. 6 ukazuje, že tyto počty plátků představují členy Fibonacciho posloupnosti. Sledujeme-li pozici každého dalšího plátku počínaje vnějším největším plátkem, o jakou část kruhu (otočky) je posunutý každý další plátek, dostáváme přibližně hodnoty 0,618 otočky, 0,236 otočky, 0,854 otočky, atd. Tyto hodnoty představují desetinné (někdy též nazývané „necelé“ či „zlomkové“) části celočíselných násobků čísla ϕ .

Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

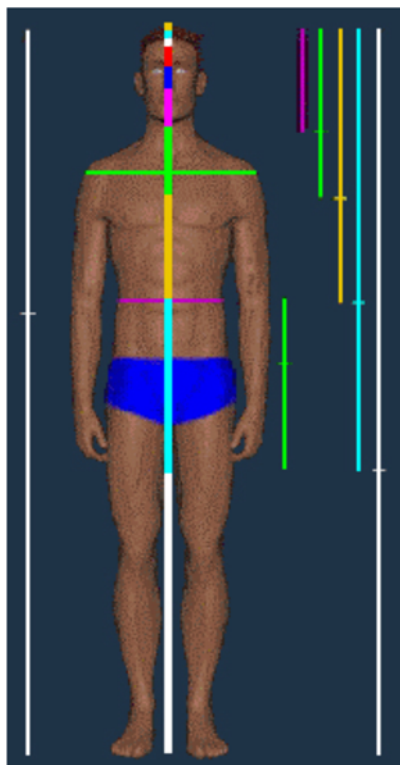


Obrázek 6. Korunní lístky (květní plátky) růže

od 1. lístku k 2. lístku	$1 \cdot \varphi \doteq 1,618$	otočení o 0,618 otočky
od 2. lístku k 3. lístku	$2 \cdot \varphi \doteq 3,236$	otočení o 0,236 otočky
od 3. lístku k 4. lístku	$3 \cdot \varphi \doteq 4,854$	otočení o 0,854 otočky
od 4. lístku k 5. lístku	$4 \cdot \varphi \doteq 6,472$	otočení o 0,472 otočky
od 5. lístku k 6. lístku	$5 \cdot \varphi \doteq 8,090$	otočení o 0,090 otočky

Nyní se zaměříme v několika ukázkách na výskyt čísla φ („zlatého řezu“, „božské proporce“) na lidském těle. Nejprve se zaměříme na proporce celkové postavy. Na Obr. 7 můžeme na postavě člověka vyzorovat několik proporcí odpovídajících v poměru hodnotě čísla φ . Vzdálenosti konkrétních bodů lidského těla jsou vyjádřeny barevnými úsečkami vedle postavy. (Nebude asi odpovídat každému člověku, jedná se o zidealizovaný model postavy.)

Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci



Obrázek 7. Proporce „zidealizované“ lidské postavy

- Bílá úsečka představuje celkovou tělesnou výšku.
- Modrá úsečka představuje zlatý řez bílé úsečky. Vyjadřuje vzdálenost od vrcholu hlavy (vertexu) ke konečkům prstů.
- Žlutá úsečka představuje zlatý řez modré úsečky. Vyjadřuje vzdálenost vertexu od pupku popř. loktů.
- Zelená úsečka představuje zlatý řez žluté úsečky. Vyjadřuje vzdálenost od vertexu k prsním svalům nebo též šířku ramen.
- Fialová úsečka představuje zlatý řez zelené úsečky. Vyjadřuje vzdálenost vertexu od spodiny lebeční nebo též šířku břicha.

Pro zajímavost:

Existuje souvislost hodnoty poměru zlatého řezu, stavby lidského těla a čísla 5.

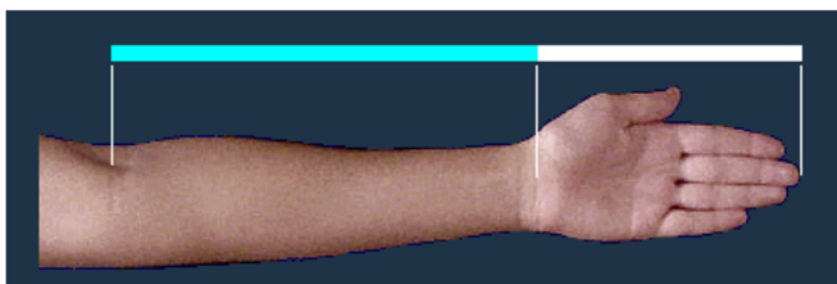
- 5 výstupů z trupu: 2 ruce, 2 nohy, 1 hlava
- 5 výstupů z každé výše uvedené části těla: 5 prstů na každé noze a ruce a 5 výstupů na hlavě (2 sluchové, 2 čichové, 1 ústní).
- 5 smyslů: zrak, sluch, hmat, chuť a čich

Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Hodnota zlatého řezu se dá také vyjádřit desetinnými čísly následovně: $\varphi = 5^{0,5} \cdot 0,5 + 0,5$.

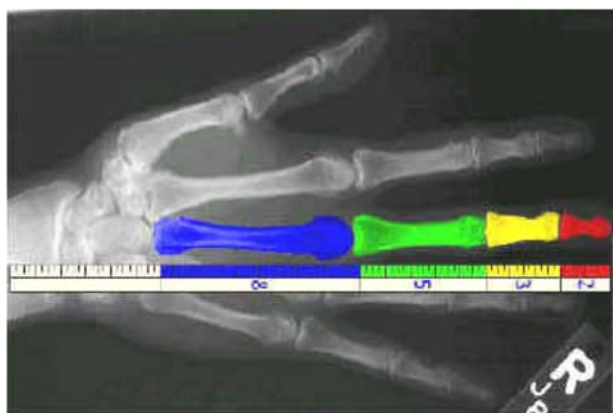
Pozn. Existují i další souvislosti zlatého řezu s číslem 5, jako je pravidelný pětiúhelník a také pentagram.

Podíváme-li se dále na některé části našeho „zidealizovaného“ lidského těla např. na paži, zjistíme, že poměr délky předloktí ku délce ruky je také roven číslu φ (Obr. 8).



Obrázek 8. Proporce paže

Půjdeme-li ještě k menším částem paže, např. k proporcím některých kostí ruky, zjistíme, že pro délky kostí např. prostředníčku platí: 1. článěk : 2. článku : 3. článku : příslušné záprstní kosti = 2 : 3 : 5 : 8 (viz Obr. 9). Jedná se o po sobě jdoucí čísla Fibonacciho posloupnosti, nebo také se dá vždy následující hodnota získat vynásobením předchozí hodnoty číslem φ a zaokrouhlením na celé číslo.

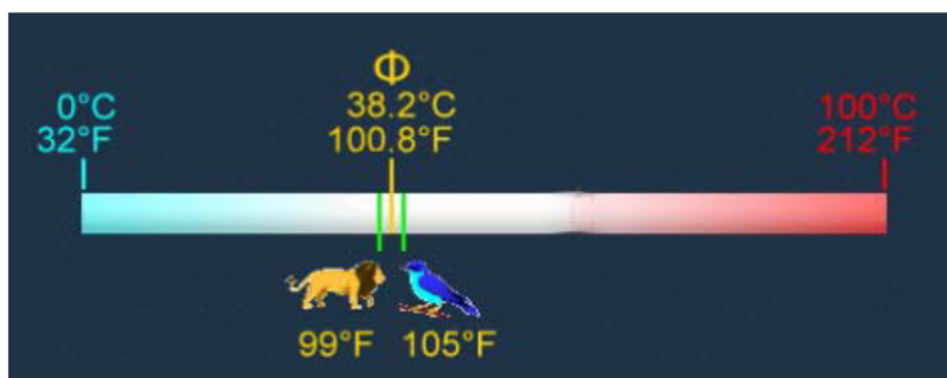


Obrázek 9. Proporce některých kostí ruky

Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Nyní si ještě ukážeme, jak je to s tělesnou teplotou nás a dalších savců.

Průměrná teplota člověka se uvádí přibližně 37 °C. Kdybychom zprůměrovali naši tělesnou teplotu s dalšími savci, jako jsou sloni, velryby, netopýři, koně, tuleni, paviáni, králíci, skot, kozy, psi, kočky,... dostali bychom průměrnou tělesnou teplotu tohoto souboru savců rovnu 38,1 °C. Na Obr. 10 můžeme vidět, že tato teplota se téměř neliší od teploty zkonstruované zlatým řezem mezi teplotami 0 °C a 100 °C. Pravděpodobně nám tato „božská proporce“ vymezuje mezi extrémními teplotami pro změnu skupenství vody nejvhodnější teplotu vhodnou pro náš život, neboť naše těla jsou z převážné části tvořena právě vodou.

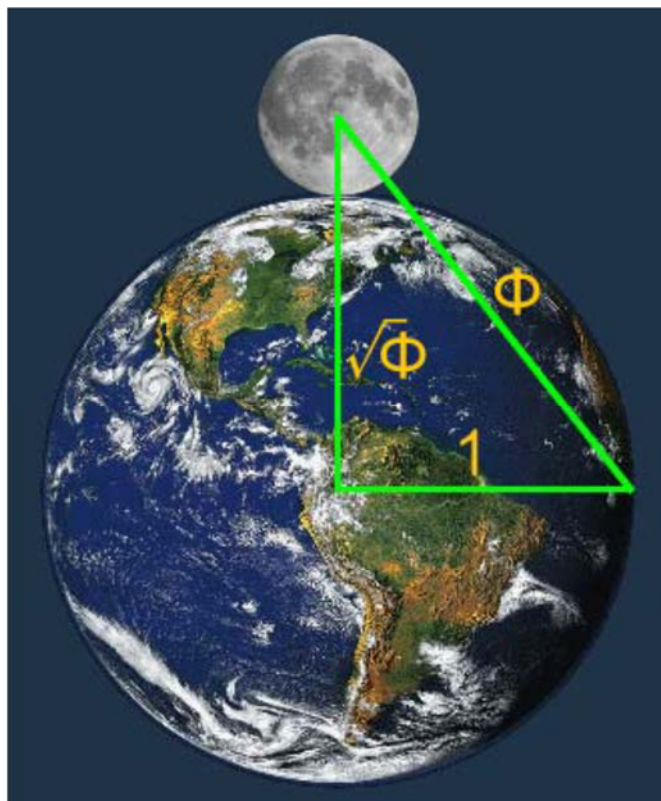


Obrázek 10. Teplota ve zlatém řezu na stupnici mezi 0 a 100 °C

A jak to vypadá s proporcemi našeho světa (naší planety Země) v součinnosti s naším jediným přirozeným satelitem (Měsícem)?

Velikost poloměru naší planety (6378 km) si zvolíme za jednotku délky. Pokud k této délce připočteme v příslušném poměru délku odpovídající poloměru měsíce (1737 km) a tuto výslednou délku spolu s původní jednotkovou délkou zakreslíme jako odvěsny pravoúhlého trojúhelníka (viz Obr. 11), bude poměr přepony výsledného pravoúhlého trojúhelníka k původní jednotkové délce (poloměr Země) téměř roven číslu φ . Zároveň poměr součtu poloměrů Země a Měsíce k poloměru Země je roven přibližně $\sqrt{\varphi}$.

Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci



Obrázek 11. Vzájemná proporce Země a Měsíce

Závěr

O „zlatém řezu“ neboli číslu ϕ by se dalo uvést mnoho a mnoho dalšího zajímavého. Minimálně z hlediska geometrických útvarů, z nichž nejznámější je „zlatá spirála“, by bylo potřeba k dané problematice zrealizovat samostatnou přednášku. I když se hodnota tohoto poměru někdy též označuje jako „božská proporce“, nepovažujeme již dnes tyto zákonitosti za něco mystického či nadpřirozeného (např. Mario Livio ve své knize Zlatý řez věnuje jednu kapitolu tématu „Je bůh matematik?“), neboť z hlediska historického byli i matematikové ovlivňováni náboženstvím a dokud se jim nepodařilo objasnit některé matematické zákonitosti, principy a vztahy, upínali se k „vyšším silám“ jako např. Kepler když napsal, že „geometrie dodala Bohu vzory pro stvoření světa a spolu s obrazem Boha přešla na člověka“.

Je možné, že matematika je jediný univerzální jazyk vesmíru, proto budeme-li někdy chtít komunikovat s jinými civilizacemi ve vesmíru, budeme muset bezpochyby začít matematikou. Dnes již na hodnotu zlatého řezu nahlížíme jako na zcela reálnou problematiku, která je pro nás zajímavá jak svou historií, estetikou (stavitelství, umění) a samozřejmě matematikou.

Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Z hlediska interdisciplinárního je zlatý řez zlatým příkladem toho, že matematika není jen věda teoretická sama pro sebe, ale uplatňuje se ve všech možných oblastech našeho života, našeho světa, že je všude kolem nás. Když začneme hledat zlatý řez, zjistili bychom, že kdo hledá, ten najde. I když není povědomí o hodnotě zlatého řezu φ u lidí zastoupeno tak často jako třeba hodnota Ludolfova čísla π , je výskyt čísla φ velmi rozsáhlý. Ukázali jsme si jen několik příkladů nalezení zlatého řezu na rostlinách a na lidském těle. Stejně tak bychom byli úspěšní při hledání tohoto poměru v živočišné říši i v neživé přírodě. I když stále mnoho lidí o tomto poměru zlatého řezu neví, přesto však naše oko je na tuto proporci zvyklé. Vnímáme ji jako něco pěkného a přirozeného. Proto se nám v našem světě, který nás obklopuje v různých oblastech našeho života, líbí právě ty věci, které tuto proporci vykazují, ať již jsou to díla architektury, malířství, sochařství, fotografování apod.

Doporučená literatura

- [1] Kotková, K. *Zlatý řez*. Diplomová práce. Vedoucí práce: J. Beránek. Brno: Katedra matematiky PdF MU, 2008. URL: <https://is.muni.cz/th/je39t/dipl.prace_Kotkova.txt>.
- [2] Šupíková, K. *Svět očima Leonarda Fibonacci*. Diplomová práce. Vedoucí práce: B. Novák. Olomouc: Katedra matematiky PdF UP, 2008.
- [3] Buriánová, N. *Fibonacciho posloupnost*. Bakalářská práce. Vedoucí práce: M. Pavlačková. Olomouc: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky PŘF UP, 2014.

Doplňující literatura pro zájemce

- [4] Dunlap, R. A. *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. World Scientific Pub Co Inc, 1998.
- [5] Knott, R. *Fibonacci Numbers and the Golden Section*. URL: <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fib.html>.
- [6] Livio, M. *Zlatý řez – Příběh φ , nejpodivuhodnějšího čísla na světě*. Praha: Dokořán, 2006.
- [7] Nocar, D., Bártková, E. Výskyt zlatého čísla φ v přírodě. In *Matematyka w przyrodzie - matematyka i przyroda w kształceniu powszechnym*. Nowy Sącz: Instytut Pedagogiczny Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej, 2011.
- [8] Olsen, S. *Záhadný zlatý řez největší tajemství přírody*. 2. vydání. Praha: Dokořán, 2009.
- [9] Pacioli, L. & Da Vinci, L. *De Divina Proportione*. USA: Createspace Independent Publishing Platform, 2014. (anglický překlad původní verze z roku 1509).
- [10] PHI 1.618: *The Golden Number*. PhiPoint Solution, LLC. URL: <http://goldennumber.net>.