Studijní text k projektu

Moderní trendy ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Aplikace kombinatoriky v geometrii (průvodce studiem)

Karel Pastor

Cíl semináře: na semináři se studenti dozvědí, co se skýtá za pojmem parketáž, a porozumět tak základním technikám pokrývání rovinného útvaru pravidelnými mnohoúhelníky. Speciálně pak budou umět rozhodnout, zda je možné pokrýt šachovnici útvary typu domino nebo trimino. Pozornost bude věnována rovněž matematickým šachovým úlohám, například se zamyslíme nad tím, kolik je potřeba dam k ovládnutí šachovnice 7×7. Dalším cílem semináře je seznámení s využitím rekurentních metod kombinatorických úloh v geometrii.

1. Parketáž

K seznámení s pojmem parketáž vyjdeme z definic, které je možné najít (v obecnější formě) například v (Švrček, 2003).

Vnitřním bodem rovinného útvaru U nazveme takový bod $a \in U$, pro který platí, že v útvaru U leží také alespoň jeden kruh, jehož je bod a středem.

Dva rovinné útvary U a V se *překrývají*, právě když aspoň jeden vnitřní bod útvaru U je současně také vnitřním bodem útvaru V.

Uvažujme systém (množinu) rovinných útvarů $T = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ a rovinný útvar U. Pokud platí $U \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, systém T *pokrývá* útvar U.

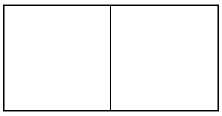
Pokud $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ a žádné dva útvary systému T se *nepřekrývají*, pak říkáme, že systém T *vyplňuje* útvar U. Pokud jsou prvky systému T pravidelné mnohoúhelníky, hovoříme o *parketáži.*

Předchozí pojem parketáž vcelku koresponduje s běžným životem, například s položením dlažby na chodníku, vzorem na koberci nebo obklady na sociálních zařízeních. Na semináři si ukážeme, že parketáž roviny pomocí shodných pravidelných n-úhelníků lze provést pouze pomocí rovnostranných trojúhelníků, čtverců a pravidelných šestiúhelníků, nikoliv však pomocí například pravidelných osmiúhelníků.

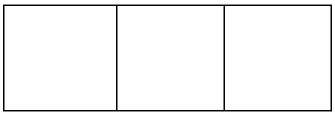
Více možností parketáže roviny pak dostaneme, pokud připustíme, že můžeme využít více typů pravidelných mnohoúhelníků. Lze například dokázat (Švrček, 2003), že rovinu je možné vyplnit pomocí čtverců, pravidelných šestiúhelníků a pravidelných dvanáctiúhelníků, přičemž každý vrchol předchozích mnohoúhelníků je vrcholem právě jednoho čtverce, jednoho šestiúhelníku a jednoho dvanáctiúhelníku.

Mezi zajímavé úlohy patří úlohy na vyplnění šachovnice $n \times n$, kde n je přirozené číslo, pomocí tzv. polymin – jedná se o pravoúhelníky sestavené ze čverců, které jsou stejné jako políčko uvažované šachovnice. Následuje přehled jednotlivých polymin:

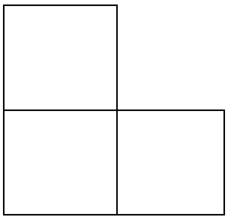
a) domino



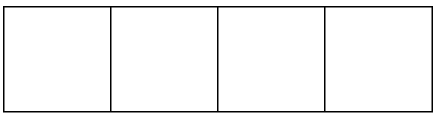
b) přímé trimino



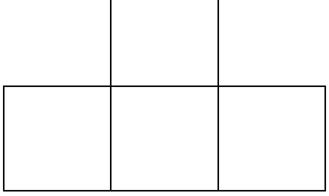
c) L - trimino



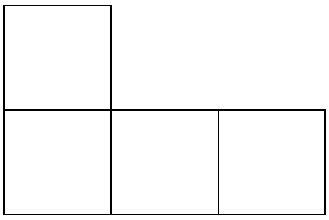
d) přímé tetromino



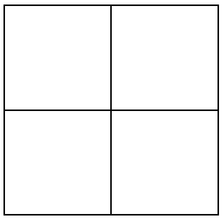
e) T – tetromino



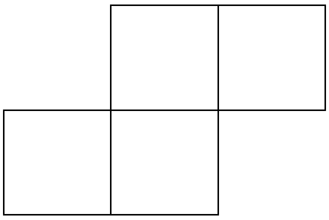
f) L – tetromino



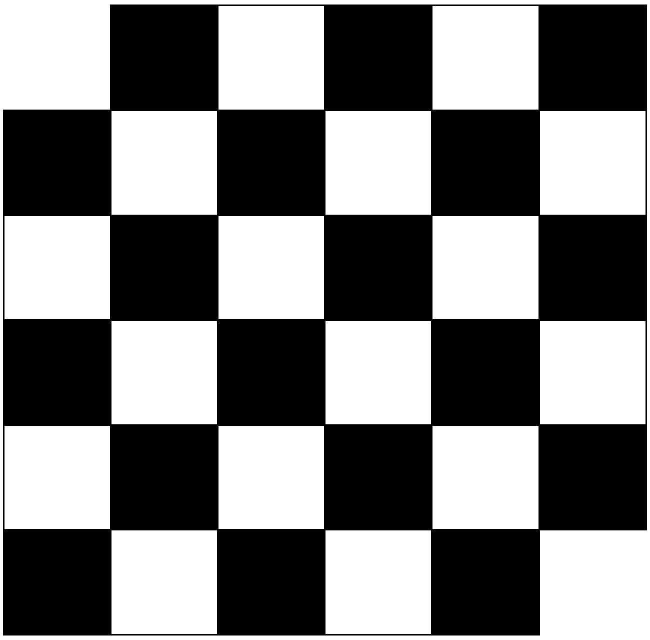
g) čtvercové tetromino



h) šikmé tetromino



Příklad 1. Ze čtvercové šachovnice 6×6 odstraníme po jednom poli v protějších rozích jako je tomu na obrázku:



Ptáme se, zda lze takto modifikovaná šachovnice vyplnit dominy.

Řešení: Sporem dokážeme, že modifikovanou šachovnici dominy vyplnit nelze. Každé domino totiž musí pokrývat vždy jedno černé a jedno bílé pole. Pokud bychom upravenou šachovnici byli schopni pokrýt dominy, muselo by jich být

$$\frac{36-2}{2} = 17,$$

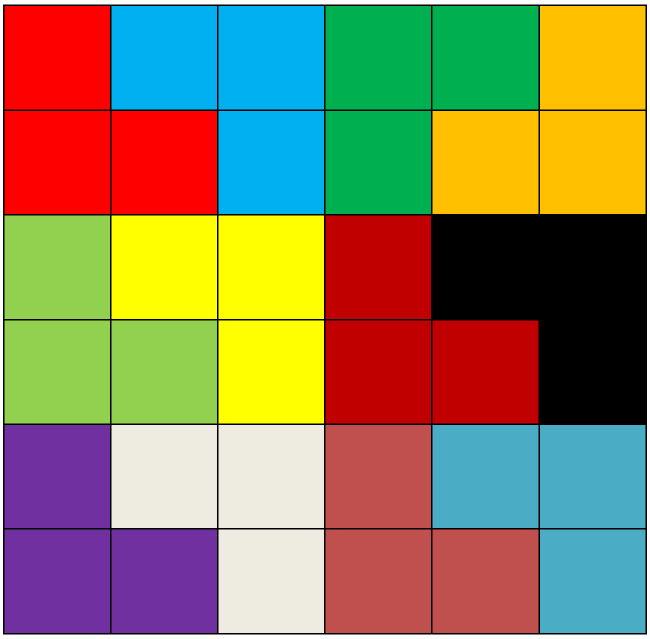
Tedy by vyplňovaly 17 černých polí a 17 bílých polí. Nicméně námi modifikovaná šachovnice má 16 bílých polí a 18 polí černých, tudíž jsme došli ke kýženému sporu.

Příklad 2. Uvažujme šachovnici 9×9. Je možné tuto šachovnici pokrýt šikmými tetrominy?

Řešení: Jelikož je šikmé tetromino složené ze 4 čtverců, není možné jimi pokrýt šachovnici 9×9, která sestává z 81 čtverců.

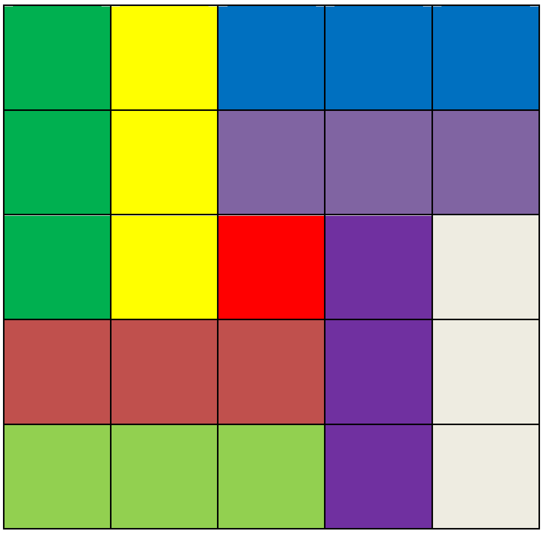
Příklad 3. Rozhodněte, zda lze šachovnici 6×6 pokrýt pomocí L-trimin.

Řešení: Ukážeme na obrázku, že to lze udělat:



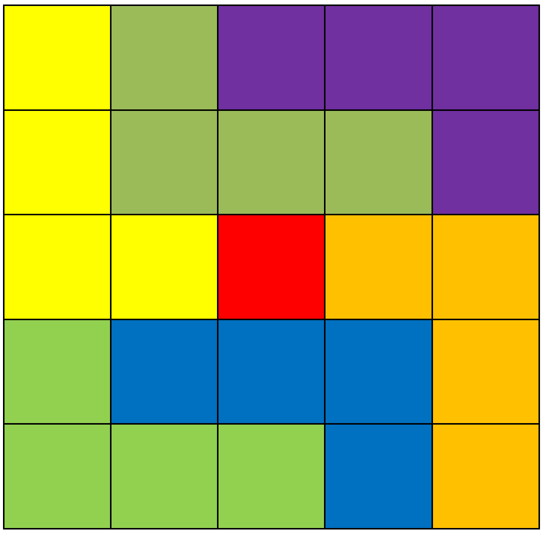
Příklad 4. Ukažte, že papírovou šachovnici 5×5 je možné rozstříhat na jeden čtverec 1×1 a přímá trimina (jedná se o speciální případ obecnějšího Příkladu 7.8 uvedeného v (Švrček, 2003)).

Řešení: Ukážeme na obrázku, jak je to možné udělat.



Příklad 5. Ukažte, že papírovou šachovnici 5×5 je možné rozstříhat na jeden čtverec 1×1 a L-tetromina.

Řešení: Jedna z možností je ukázána na následujícím obrázku.



2. Matematické šachové problémy

Matematické šachové problémy ("Mathematical chess problems", Wikipedia) jsou takové matematické problémy, pro jejichž formulaci použijeme šachovnici a/nebo šachové figurky. Mnoho vynikajících matematiků jako například Leonhard Euler nebo Karl Friedrich Gauss se zabývali těmito problémy. Speciálním případem matematických šachových problémů jsou problémy nezávislosti, kdy pro nějakou šachovou figurku (krále, dámu, věž, střelce, jezdce) hledáme maximální počet těchto figurek, které je možné umístit na šachovnici takovým způsobem, aby se vzájemně nenapadaly.

Pro obecnou šachovnici $n \times n$, kde n je přirozené číslo, byly odvozeny pro jednotlivé figurky obecné vzorce (Gik, 2019). My se však zaměříme na šachovnici 7×7.

a) Král. Vzhledem k tomu, že obecně platí, že maximální možný počet králů na šachovnici $n \times n$ je k^2, kde n = 2·k nebo n = 2·k-1, tak pro šachovnici 7×7 bude maximální počet králů, kteří se vzájemně nenapadají, 16, jak ilustruje diagram 1.

b) Dáma. Vzhledem k tomu, že obecně platí, že maximální možný počet dam na šachovnici $n \times n$ je n, kde $n \geq 4$, tak pro šachovnici 7×7 bude maximální počet dam, které se vzájemně nenapadají, 7, jak ilustruje diagram 2.

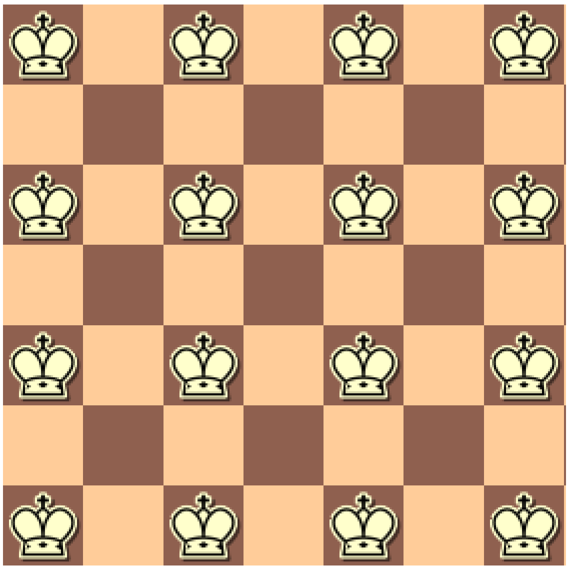


diagram 1: králové

c) Věž. Pro šachovnici $n \times n$ platí, že maximální počet věží, které se nenapadají, je n. Tudíž pro šachovnici 7×7 bude maximální počet věží 7. Možné rozestavění věží je na diagramu 3.

d) Střelec. Jelikož pro šachovnici $n \times n$ platí, že maximální počet střelců, kteří se nenapadají, je $2n - 2$, pro $n \geq 2$, tak pro šachovnici 7×7 musí být hledané maximum střelců rovno 12. Jedno z možných postavení je ukázáno na diagramu 4.

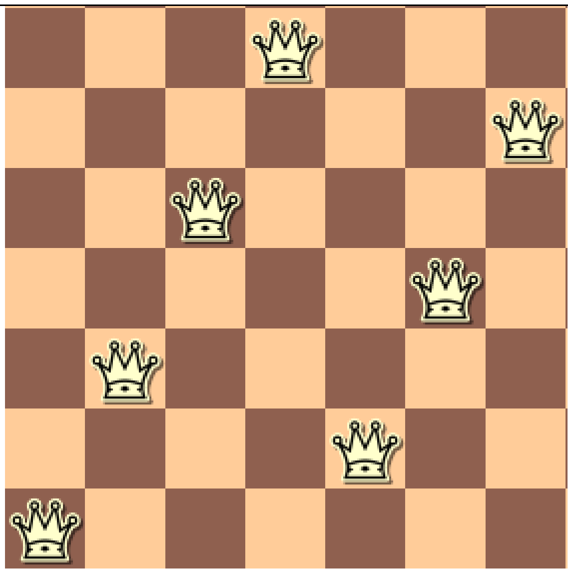


diagram 2: dámy

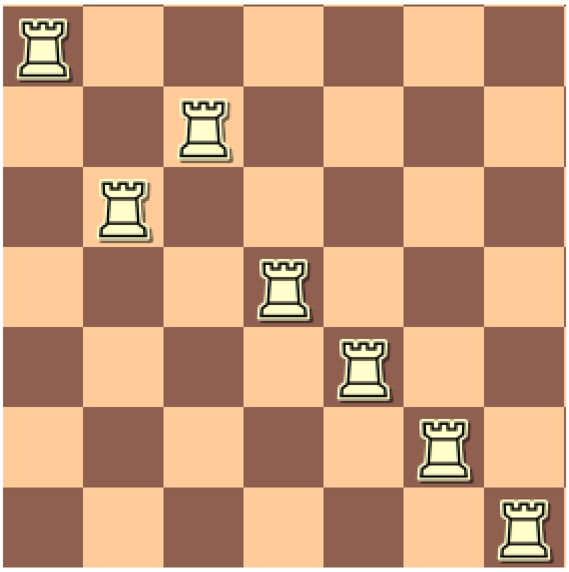


diagram 3: věže

e) Jezdec. Při stanovení maximálního počtu jezdců, kteří se nenapadají, na obecné šachovnici $n \times n$ záleží na tom, zda n je sudé nebo liché. Pro n sudé je příslušné maximum rovno $\frac{n^2}{2}$ a pro n liché je maximum rovno $\frac{n^2+1}{2}$. Tím pádem pro šachovnici 7×7 dostáváme maximum 25. Jedna z možností je znázorněna na diagramu 5.

Na závěr této kapitoly uveďme pro zajímavost (Gik, 2019) situaci na šachovnici 8×8, kde je současně maximální možný počet dam, věží a střelců, aby se stejné figurky nenapadaly. Podle předchozích obecných vzorců se jedná o 8 dam, 8 věží a 14 střelců. Tato rekordní pozice je zachycena na diagramu 6.

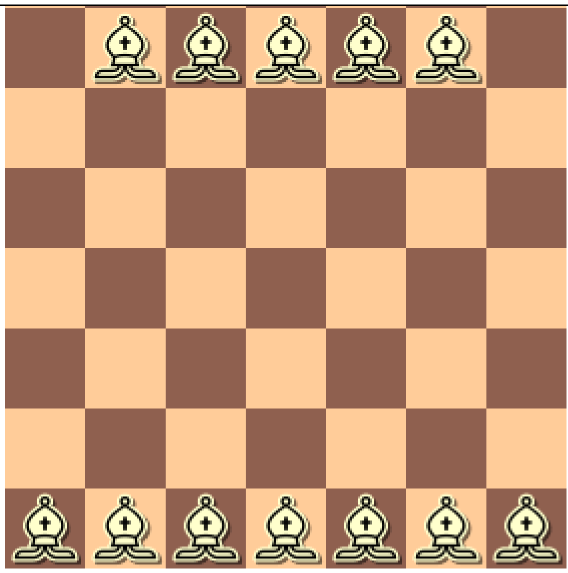


diagram 4: střelci

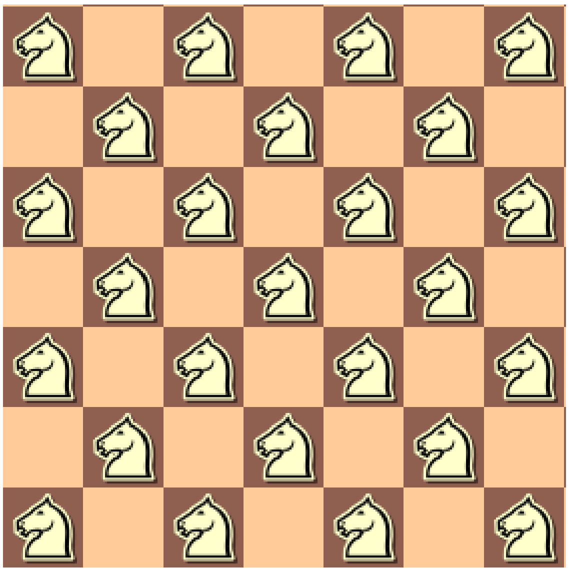


diagram 5: jezdci

3. Rekurentní metody

Jak dobře víme ze střední školy, posloupnost je možné zadat také pomocí rekurentního vzorce. Rekurentní vzorec určuje člen posloupnosti s využitím znalostí předchozího nebo pomocí několika předchozích členů, přičemž je zadán první nebo několik prvních členů uvažované posloupnosti. Z rekurentního vzorce pro posloupnost je možné získat předpis pro n-tý člen posloupnosti. Tento postup je možné použít i při řešení některých úloh kombinatorické geometrie, jak si ukážeme na následujícím příkladě.

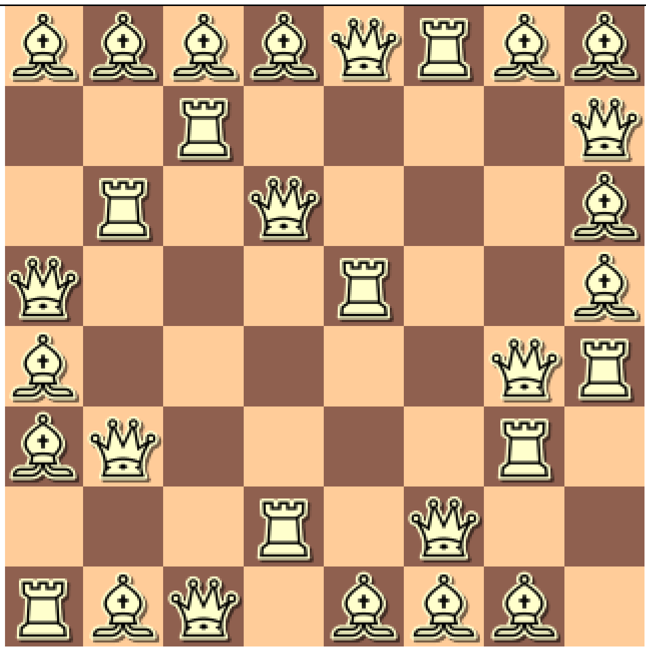
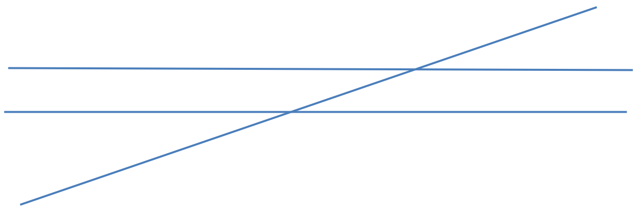


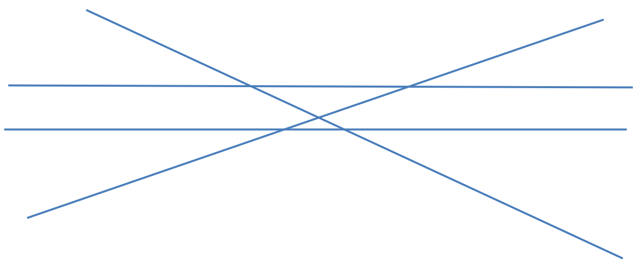
diagram 6: dámy, věže a střelci zároveň

Příklad 5. V rovině je dáno n přímek, z nichž právě dvě jsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v žádném bodě. Na kolik částí je těmito n přímkami rozdělena rovina?

Řešení: Pokud $n = 3$, tak je rovina rozdělena na 6 částí, jak vidíme na následujícím obrázku.



Další obrázek pak ukazuje, že 4 takové přímky rozdělí rovinu na 10 částí.



Není těžké si nyní uvědomit, že při 5 přímkách přibude dalších 5 částí roviny, k šesti přímkám pak přibude částí 6. Obecně pak k n přímkám přibude n částí rovin. Pokud označíme jako r_k počet částí roviny, na něž ji dělí k přímek vyhovující zadání příkladu, postupně dostaneme:

$$r_0 = 1,$$

$$r_1 = 2,$$

$$r_2 = 3,$$

$$r_3 = r_2 + 3,$$

$$r_4 = r_3 + 4,$$

$$r_5 = r_4 + 5,$$

$$\vdots$$

$$r_n = r_{n-1} + n.$$

Po sečtení předchozích rovností pro $n \geq 3$ dostaneme:

$$r_n = 6 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = \frac{(1+n)\cdot n}{2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

Předchozí vzorec platí s ohledem na druhý člen posloupnosti pro $n \geq 2$.

Na závěr studijního textu je uvedena jak použitá literatura, tak i další literatura rozšiřující danou problematiku.

Literatura:

BALL S.: Finite Geometry and Combinatorial Applications, Cambridge University Press, Cambridge 2015.

GIK, E.: Šachmaty i matematika (rusky). Citováno 26-06-2019, z adresy http://golovolomka.hobby.ru/books/gik/index.shtml

GOLOMB, S.W.: Polyominoes (Puzzles, Patterns, Problems and Packing). Princetown University Press, New Jersey 1994.

PACH J., AGARWAL P.K.: Combinatorial geometry, Wiley, New York 1995.

PACH J., SHARIR M.: Combinatorial Geometry and Its Algorithmic Applications: The Alcalá Lectures, American Mathematical Society, New York 2009.

ŠVRČEK J.: Úvod do kombinatoriky, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc 2003.

TŮMA J.: Matematické hlavolamy, Edice ŠMM, svazek 60, Mladá fronta, Praha 1988.

(n.d.). Mathematical chess problems. (Wikipedia). Citováno 26-06-2019, z adresy https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_chess_problem