

Metody řešení Apolloniových úloh pomocí ICT (průvodce studiem)

David Nocar

„Noli turbare circulos meos!” (Neruš mé kruhy)

Archimedes (287 – 212 př. n. l.)

Údajně Archimédova poslední slova, která pronesl, když byl vyrušen římským vojákem při studii kruhů. Voják se rozzuřil a zabil jej svým mečem.

Průvodce studiem

Milí studenti, milí čtenáři studijního textu,
v rámci tohoto studijního materiálu si ukážeme možnosti řešení základní Apolloniovy úlohy, která se také zabývá problematikou kruhů, přesněji tedy kružnic, ale předpokládám, že pro vás nebude studium této problematiky tak nebezpečné, jak bylo pro Archimeda.

Seznámíte se s formulací základní „Apolloniovy úlohy“ a ukážeme si některé metody jejího řešení. Důraz bude kladen na využívání ICT při těchto řešeních, neboť bez této pomoci je řešení náročnější, zdoluhavější a některé metody téměř nerealizovatelné.

Cíle:

Po prostudování tohoto studijního textu:

- budete stručně seznámeni s řeckým matematikem Apolloniem z Pergy a jeho dílem,
- seznámíte se s tzv. Apolloniovými úlohami,
- připomenete si některé konstrukční úlohy nutné k řešení Apolloniových úloh,
- seznámíte se s některými metodami řešení Apolloniových úloh,
- budete schopni vyřešit Apolloniovu úlohu konstrukčně i analyticky,
- pochopíte význam a efektivitu možností ICT při řešení matematických úloh.

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Uvedení do problematiky

Apolloniova úloha vždy zaujímal mezi planimetrickými úlohami zvláště významné místo nejenom proto, že její řešení vyžaduje znalosti různých matematických vztahů, ale i proto, že při jejím řešení bylo mnoho nových geometrických poznatků objeveno.

Apollonius svou úlohu formuloval v dnes již nedochovaném díle „O dotycích“, neznáme tedy přesně její původní znění. Známa je jenom její reprodukce z díla Pappa z Alexandrie, který ji uvádí v následujícím znění:

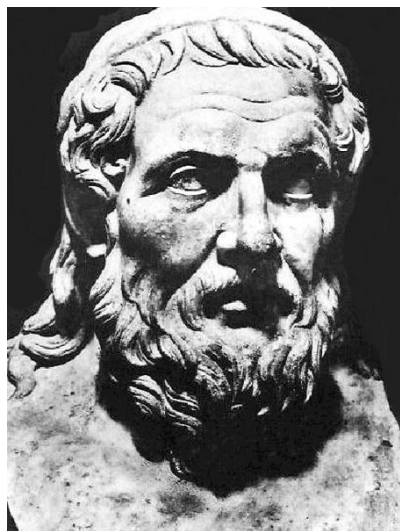
Nechť jsou dány tři prvky, z nichž každý může být bodem, přímkou nebo kruhem; má se narysovat kruh, který prochází každým z daných bodů a dotýká se daných přímek či kruhů.

Dnes mluvíme o obecné Apolloniově úloze, tj. *sestrojit kružnici, která se dotýká tří daných kružnic*. Ve speciálních případech považujeme za kružnici i bod (kružnice s nulovým poloměrem) a přímku (kružnice s nekonečně velkým poloměrem).

Některé konkrétní Apolloniovy úlohy řeší již žáci na základní škole, některé zase vyžadují hlubší znalosti z geometrie, jakou jsou množiny bodů daných vlastností, stejnolehlost, mocnost bodu ke kružnici, kruhová inverze, dilatace či analytické řešení vycházející z dalších známých geometrických poznatků.

Něco z historie...

Apollonius z Pergy (262 př. n. l. – 190 př. n. l.)



Apollonius byl řecký matematik, geometr i astronom. Pocházel z řeckého města Perga, které je dnes známo jako Murtina (Turecko). Již v mládí odešel z Pergy do Alexandrie (Egypt), kde studoval pod vedením Euklidových následovníků a později zde i vyučoval. Část svého života pobýval v Efezu a také v Pergamu, kde byla univerzita a knihovna podobná Alexandrijské a kde se také setkal s Eudemem z Pergamu. Byl také současníkem Archimedovým, ale svou práci navazoval spíš na Eukleida. Apollonius zemřel v Alexandrii jako vážený matematik známý také pod titulem „Velký geometr“. Většina jeho děl se nedochovala. Většina údajů o jeho životě s díle pochází z děl Pappa Alexandrijského.

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Nejznámější díla Apollonia z Pergy:

Kónika (Pojednání o kuželosečkách) - Jednalo se o osmisvazkové dílo, jehož první čtyři díly se zachovaly v řeckém originálu, další tři v arabském překladu, poslední osmý dík se nedochoval. První čtyři díly obsahují převážně shrnutí poznatků již do té doby známých, ale jsou rozpracovány do větší hloubky a přesněji. Pátý až sedmý díl obsahují původní Apolloniovy myšlenky a zabývají se normálami ke kuželosečkám, středem křivosti a dalšími poznatky o kuželosečkách. Před Apollóniem byla definována jediná kuželosečka - kružnice, on doplnil a definoval elipsu, parabolu a hyperbolu. Dokázal, že všechny kuželosečky lze odvodit z rovinného řezu dvojitého kužele.

O dotycích (De Tactionibus) - Dvousvazkové dílo, které se, bohužel, nedochovalo a je známo, podobně jako ostatní Apolloniova díla, z citací z děl Pappa z Alexandrie. V tomto díle formuloval a vyřešil úlohu dnes známou jako Apolloniova úloha.

Průvodce studiem

Z děl Apollonia z Pergy jsme si uvedli pouze dvě, které jsou pro naši práci nejdůležitější. Kniha *O dotycích* definuje tzv. Apolloniovu úlohu, které se v tomto studijním materiálu budeme věnovat, a druhá kniha *Kónika* definuje kuželosečky, které budeme využívat při řešení Apolloniovy úlohy za použití ICT (nástrojů dynamické geometrie).

Apolloniova úloha

Sestrojte kružnici, která se dotýká tří daných kružnic.

Ve speciálních případech považujeme za kružnici i bod (kružnice s nulovým poloměrem) a přímku (kružnice s nekonečně velkým poloměrem).

Budeme-li uvažovat všechny 3 možné geometrické útvary: kružnice (k), bod (B), přímka (p), můžeme spočítat počet kombinací, o kterých můžeme tímto zadáním uvažovat, jako kombinace s opakováním třetí třídy ze tří prvků.

$$C'(n, k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

$$C'(3, 3) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2} = 2 \cdot 5 = 10$$

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Průvodce studiem

U takto malého počtu prvků i bez znalostí nějakých vzorců z kombinatoriky bychom lehce zjistili všech 10 následujících možností: kkk , kkB , kkp , kBB , kpp , kBp , Bpp , BBp , ppp , BBB .

Některé výše uvedené typy úloh jsem schopni řešit již na základní a střední škole. Většinou se jedná o řešení za pomoci množin bodů daných vlastností (MBDV) např. kružnice, přímka (osa úsečky, osa úhlu) nebo také často užitím stejnolehlosti.

My se budeme v tomto textu věnovat obecné Apolloniově úloze kkk , kde budeme uvažovat poloměry různé od nulového a nekonečně velkého. Takto zadaná úloha se řeší dalšími metodami, kde se využívá např. chordály a s tím související mocnost bodu ke kružnici, kruhové inverze nebo také pomocí MBDV, kde se tentokrát bude jednat o kuželosečky. Existují i další metody, které by již byly nad rámec a rozsah tohoto studijního textu, ale nelze opomenout i analytické řešení úlohy.

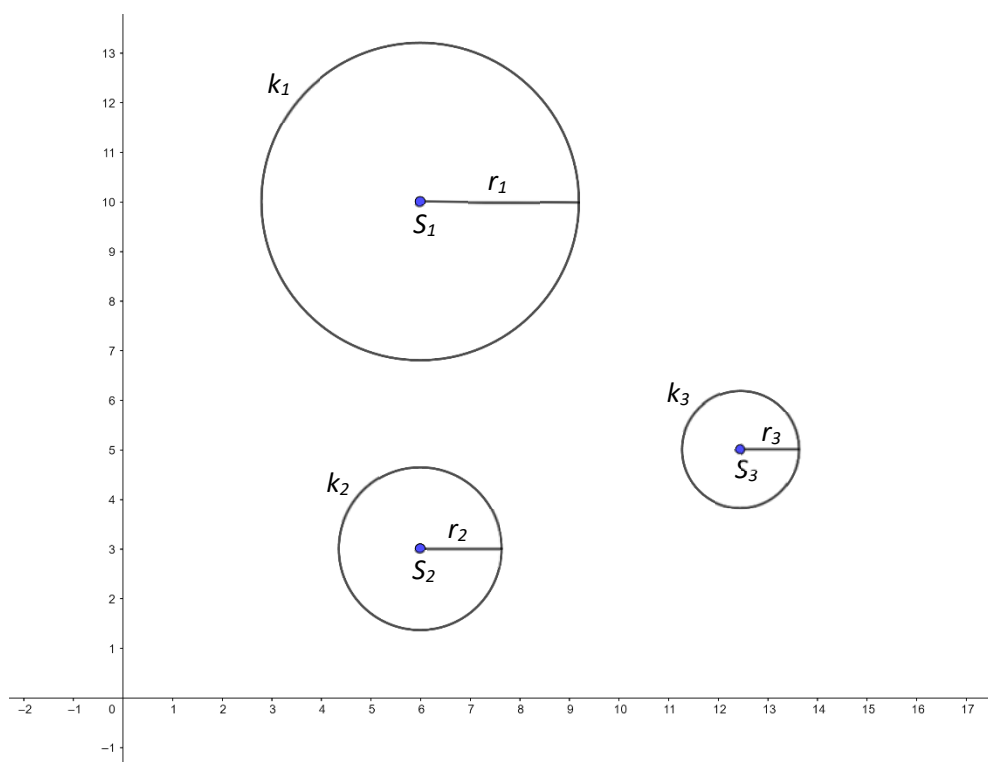
Takováto obecná úloha má nejvýše 8 řešení, což plyne z toho, že hledaná kružnice má dvě možnosti dotyku s každou zadanou kružnicí (vnější a vnitřní dotyk), dohromady má tedy $2^3 = 8$ možností dotyků se všemi třemi zadanými kružnicemi. Konkrétní počet řešení závisí na daných kružnicích (rozmístění středů kružnic a velikosti jejich poloměrů).

Počet řešení Apolloniovy úlohy kkk :

- a) Jsou-li kružnice k_1 , k_2 , k_3 soustředné, úloha nemá řešení.
- b) Jsou-li kružnice k_1 , k_2 soustředné ($r_1 < r_2$) a kružnice k_3 leží ve vnější oblasti kružnice k_2 , úloha nemá řešení.
- c) Jsou-li kružnice k_1 , k_2 soustředné ($r_1 < r_2$) a kružnice k_3 leží ve vnitřní oblasti kružnice k_1 , úloha nemá řešení.
- d) Jsou-li kružnice k_1 , k_2 soustředné ($r_1 < r_2$) a kružnice k_3 neleží ani ve vnější oblasti kružnice k_2 ani ve vnitřní oblasti kružnice k_1 , úloha může mít až 8 řešení, řešíme užitím množin bodů daných vlastností (MBDV).
- e) Dotýkají-li se kružnice k_1 , k_2 , k_3 v jednom bodě, úloha má nekonečně mnoho řešení.
- f) Leží-li jedna kružnice uvnitř druhé a druhá uvnitř třetí, úloha nemá řešení.
- g) Leží-li jedna kružnice uvnitř druhé a třetí leží ve vnější oblasti větší z nich, úloha nemá řešení.
- h) V jiné poloze než v úlohách a) - g), úloha může mít až 8 řešení, řešíme různými metodami (např. dilatace, kruhová inverze, MBDV + ICT).

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Př. zadání Apolloniovy úlohy kkk



Průvodce studiem

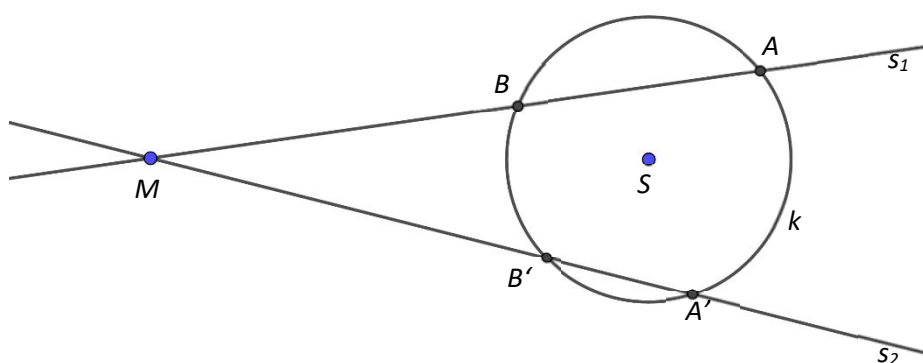
Takto zadaná úloha nekoresponduje s žádným z bodů a) – g). Budeme-li chtít úlohu vyřešit nějakou základní metodou MBDV, musíme zadání úlohy nějakým vhodným involutorním zobrazením převést na úlohu z bodu d) tak, že dvě kružnice budou soustředné a třetí bude ležet mezi nimi (v „mezikružích“). Takovou úlohu řešíme metodou MBDV. Řešení úlohy pak ale musíme stejným zobrazením převést zpět, čímž získáme řešení původního zadání úlohy.

Převedení dvou kružnic na soustředné kružnice provedeme užitím kruhové inverze (kruhová inverze je involutorní zobrazení). Při využívání kruhové inverze je důležitá správná volba základní kružnice (inverze). Základní kružnici tedy musíme zvolit tak, aby se dvě zadané kružnice zobrazily na soustředné kružnice. K tomuto účelu si ještě připomeneme chordálu dvou kružnic a s tím související mocnost bodu ke kružnici.

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Mocnost bodu ke kružnici

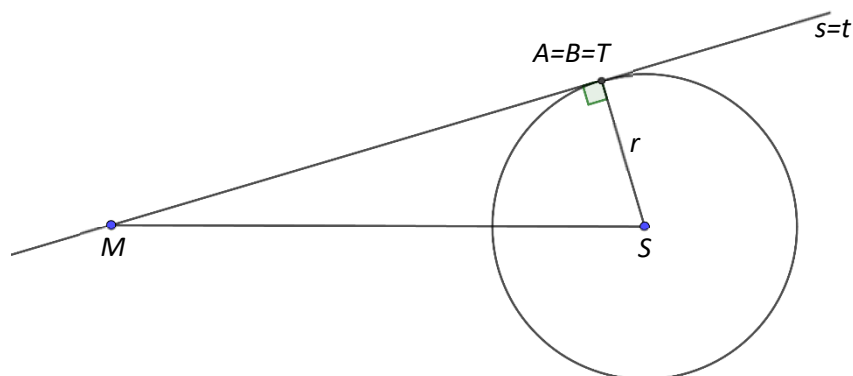
Definice: Libovolnému bodu M roviny přiřadíme reálné číslo m , pro něž platí $m = |MA| \cdot |MB|$, kde A, B jsou průsečíky dané kružnice k s libovolnou sečnou s procházející daným bodem M . Takovéto m nazýváme mocností bodu M ke kružnici k .



Průvodce studiem

Podrobněji se nebude věnovat problematice mocností bodu ke kružnici, jen bych odkázal na další literaturu, neboť různí autoři definují tuto mocnost různě a někde se setkáte s definicí $m = |MS|^2 - r^2$, tak jak spolu tyto vztahy souvisí...

Pokud podle zvolené definice platí daná mocnost pro jakoukoliv libovolnou sečnu, v extrémním případě můžeme za sečnu považovat i tečnu (průsečíky A, B splynou v jeden – bod dotyku T). V takovém případě se $m = |MA| \cdot |MB| = |MT|^2$. Spojíme-li bod M se středem dané kružnice a bod dotyku T také se středem kružnice, dostáváme pravoúhlý trojúhelník (tečna je kolmá na poloměr). Dle Pythagorovy věty tedy můžeme psát $|MT|^2 = |MS|^2 - r^2$.



Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Chordála

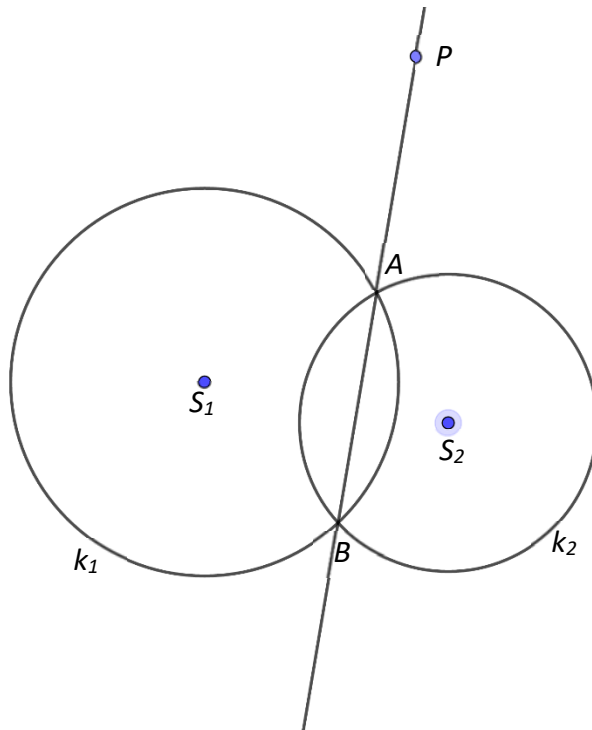
Definice: Chordála je množina bodů v rovině, které mají ke dvěma daným kružnicím k_1, k_2 stejnou mocnost.

Průvodce studiem

Poznámka: Aby nedošlo k omylu, je potřeba zdůraznit, že touto definicí se nemyslí, že by každý bod chordály měl tutéž mocnost m k zadaným kružnicím k_1, k_2 . Takové body v rovině existují maximálně dva, kdežto chordála je množina nekonečně mnoha bodů. Budeme-li mít např. $B_1, B_2, B_3, \dots$ různé body chordály, $m(B_i, k_1, k_2)$ označíme mocnost bodu B ke kružnicím k_1, k_2 , tak potom: $m(B_1, k_1, k_2) \neq m(B_2, k_1, k_2) \neq m(B_3, k_1, k_2) \dots$

Pro body chordály platí pouze: $m(B_1, k_1) = m(B_1, k_2), m(B_2, k_1) = m(B_2, k_2), m(B_3, k_1) = m(B_3, k_2), \dots$

Nechť k_1, k_2 jsou navzájem se protínající kružnice. Potom jejich průsečíky A, B mají k oběma kružnicím stejnou mocnost: $m(A, k_1, k_2) = m(B, k_1, k_2) = 0$.

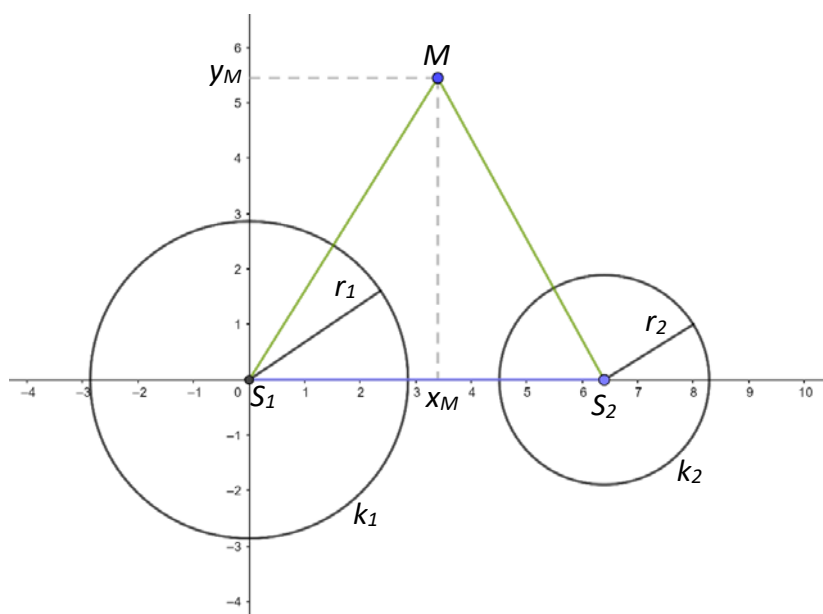


Pro libovolný bod P přímky AB zřejmě platí $m(P, k_1) = m(P, k_2) = |PA| \cdot |PB|$. Tedy přímka AB je chordála.

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Průvodce studiem

Ukážeme si i analyticky, že chordála je přímka (kolmá na „střednou“ S_1S_2). Pro zjednodušení výpočtu si zvolíme speciální umístění středů zadaných kružnic na osu x (jeden střed umístíme přímo do počátku KSS).



$$\text{Nechť } M \in ch(k_1, k_2) \Leftrightarrow |MS_1|^2 - r_1^2 = |MS_2|^2 - r_2^2.$$

Z výše uvedeného obrázku plyne z trojúhelníků $\triangle MS_1x_M$ a $\triangle MS_2x_M$ podle Pythagorovy věty:

$$x_M^2 + y_M^2 - r_1^2 = (|S_1S_2| - x_M)^2 + y_M^2 - r_2^2$$

$$x_M^2 + y_M^2 - r_1^2 = |S_1S_2|^2 - 2|S_1S_2|x_M + x_M^2 + y_M^2 - r_2^2$$

$$2|S_1S_2|x_M = |S_1S_2|^2 + r_1^2 - r_2^2$$

$$x_M = \frac{|S_1S_2|^2 + r_1^2 - r_2^2}{2|S_1S_2|}; \quad y_M \in \mathbb{R} \text{ (libovolné reálné číslo)}$$

Body M tvoří přímku (v našem případě kolmou na osu x neboli kolmou na „střednou“ $\leftrightarrow S_1S_2$).

V námi zvoleném případě $S_1 = [0, 0]$, $S_2 = [x_{S_2}, 0] \Rightarrow \overrightarrow{S_1S_2} = S_2 - S_1 = (x_{S_2}, 0)$.

Pro libovolné dva body $M_1 = \left[\frac{|S_1S_2|^2 + r_1^2 - r_2^2}{2|S_1S_2|}, y_{M1} \right]$, $M_2 = \left[\frac{|S_1S_2|^2 + r_1^2 - r_2^2}{2|S_1S_2|}, y_{M2} \right]$ chordály

$$\overrightarrow{M_1M_2} = M_2 - M_1 = (0, y_{M2} - y_{M1}).$$

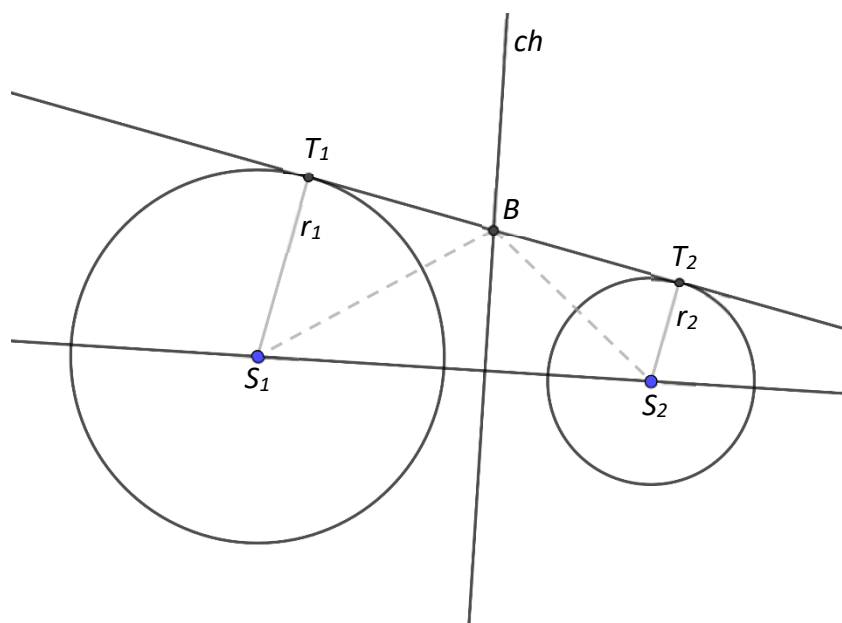
$$\overrightarrow{S_1S_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = (x_{S_2}, 0) \cdot (0, y_{M2} - y_{M1}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{S_1S_2} \perp \overrightarrow{M_1M_2} \Rightarrow \Leftrightarrow S_1S_2 \perp \Leftrightarrow M_1M_2.$$

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Průvodce studiem

Sestrojit chordálu dvou protínajících se kružnic není problém, protože známe dva body chordály (průsečíky kružnic) a víme, že chordála je přímka. Ještě si ukážeme alespoň jednu možnost sestrojení chordály dvou neprotínajících se kružnic.

Nechť k_1, k_2 jsou dvě navzájem se neprotínající kružnice. Nechť t je jejich společná tečna a nechť bod B je střed úsečky T_1T_2 , kde T_1, T_2 jsou body dotyku tečny t a kružnic k_1, k_2 . Potom přímka ch ($ch \perp S_1S_2 \wedge B \in ch$) je chordála kružnic k_1, k_2 .



Bod B náleží chordále kružnic k_1, k_2 neboť $B = T_1 \div T_2$ a tudíž $|BT_1|^2 = |BT_2|^2$.

Průvodce studiem

K nalezení chordály dvou neprotínajících se kružnic lze využít i potenčního středu – bodu, který má stejnou mocnost ke třem zadaným kružnicím. Nechávám na samostudiu.

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Průvodce studiem

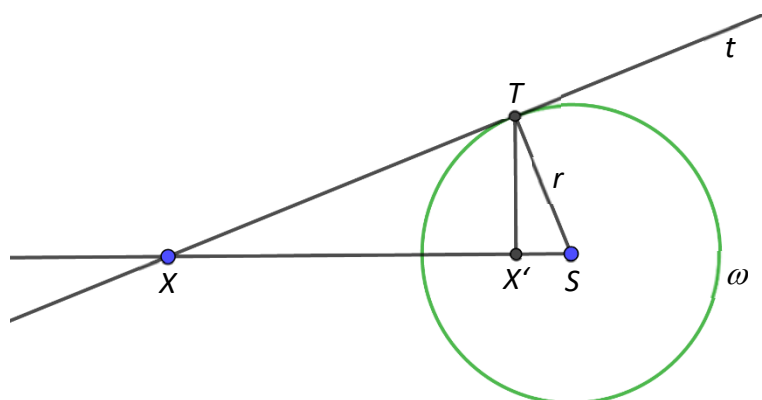
Nyní můžeme přistoupit k dalšímu kroku, volbě vhodného involutorního zobrazení, pomocí kterého pak převedeme dvě ze tří zadaných kružnic na soustředné kružnice. Tímto involutorním zobrazením bude již avizovaná kruhová inverze.

Kruhová inverze

Definice: Möbiovou rovinou M_2 rozumíme Euklidovskou rovinu E_2 rozšířenou o jeden nevlastní bod ∞ , tj. $M_2 = E_2 \cup \{\infty\}$.

Definice: Kruhová inverze i určená kružnicí $\omega(S, r)$ je zobrazení v Möbiově rovině, které každému bodu $X \neq S$ jednoznačně přiřadí bod $X' = i(X)$ následujícím způsobem:

1. $X' \in \overleftrightarrow{SX}$,
2. $|SX| \cdot |SX'| = r^2$,
3. $i(S) = \infty \wedge i(\infty) = S$.



Bodem X vedeme tečnu t ke kružnici ω , čímž získáme bod dotyku T . $\triangle XTS$ je pravoúhlý. Pro patu výšky $v_{\triangle XTS}$ sestrojené z vrcholu T na stranu SX platí dle Euklidovy věty o odvěsně následující rovnost: $r^2 = |SX| \cdot |SX'|$. Je tedy zřejmé, že pata výšky označená X' je obrazem bodu X v kruhové inverzi s kružnicí ω v souladu s definicí kruhové inverze. Tuto konstrukci tedy můžeme užívat k sestrojení obrazu bodu v kruhové inverzi.

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Některé vlastnosti kruhové inverze (bez důkazů):

Věta: Body vnitřní oblasti kružnice ω se zobrazí na body vnější oblasti této kružnice a naopak.

Věta: Body přímky procházející středem S inverze i se zobrazují opět na tuto přímku (v souladu s předchozí větou). Tato přímka je tedy slabě samodružná. (V souladu s definicí také platí $i(S) = \infty \wedge i(\infty) = S$).

Věta: Obrazem přímky p , která neprochází středem inverze S , je kružnice p' procházející středem S .

Věta: Obrazem kružnice k procházející středem inverze S je přímka k' , která neprochází středem inverze S .

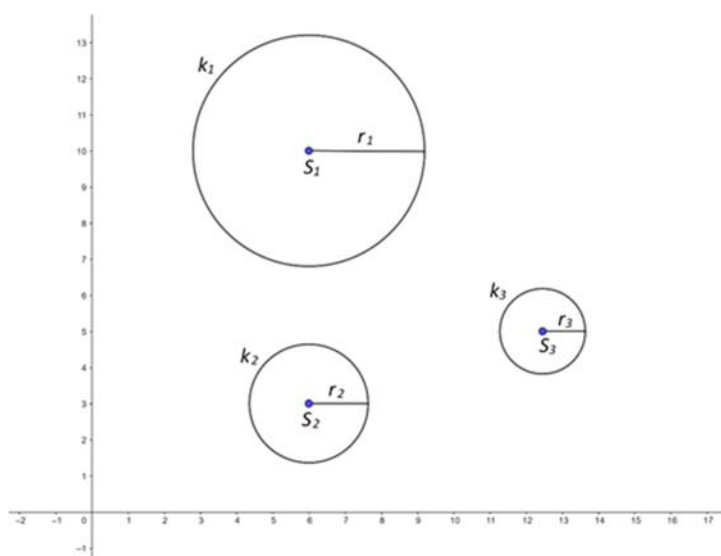
Věta: Obrazem kružnice k , která neprochází středem inverze S je kružnice k' . (Poznámka: Obrazem středu kružnice k není střed kružnice k' .)

Průvodce studiem

Důkazy uvedených vět a další vlastnosti kruhové inverze si můžete nastudovat v doporučené literatuře.

Vizuálně si můžete uvedené vlastnosti a princip fungování kruhové inverze rychle vyzkoušet s využitím nástrojů dynamické geometrie jako je např. GeoGebra.

Nyní se již vrátíme k zadání Apolloniovy úlohy kkk .



Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Rozbor:

Prvním krokem bude převedení zadaných kružnic k_1, k_2, k_3 na dvě soustředné kružnice k_1', k_2' a třetí kružnice k_3' bude ležet v jejich „mezikruží“. Provedeme pomocí vhodně zvolené kruhové inverze. Řešíme tedy stanovení kružnice ω pro kruhovou inverzi i tak, aby se kružnice k_1, k_2 zobrazily na soustředné kružnice k_1', k_2' . $i(k_1) = k_1', i(k_2) = k_2'$.

V průsečíku přímky p procházející středy kružnic S_1, S_2 , a chordály ch kružnic k_1, k_2 vznikne bod Q . Z bodu Q vedeme ke kružnici k_2 tečnu t . Bod dotyku označíme T .

Dále sestrojíme kružnici $l(Q, |QT|)$, čímž získáme body P_1, P_2 jako průsečíky kružnice l a přímky p . Bod P_1 zvolíme za střed základní kružnice ω kruhové inverze i a poloměr $r = |P_1 P_2|$. Po aplikaci takto zvolené kruhové inverze i se nám kružnice k_1, k_2 zobrazí na soustředné kružnice k_1', k_2' se středem v bodě P_2 a kružnice k_3 se zobrazí na kružnici k_3' .

Popis konstrukce:

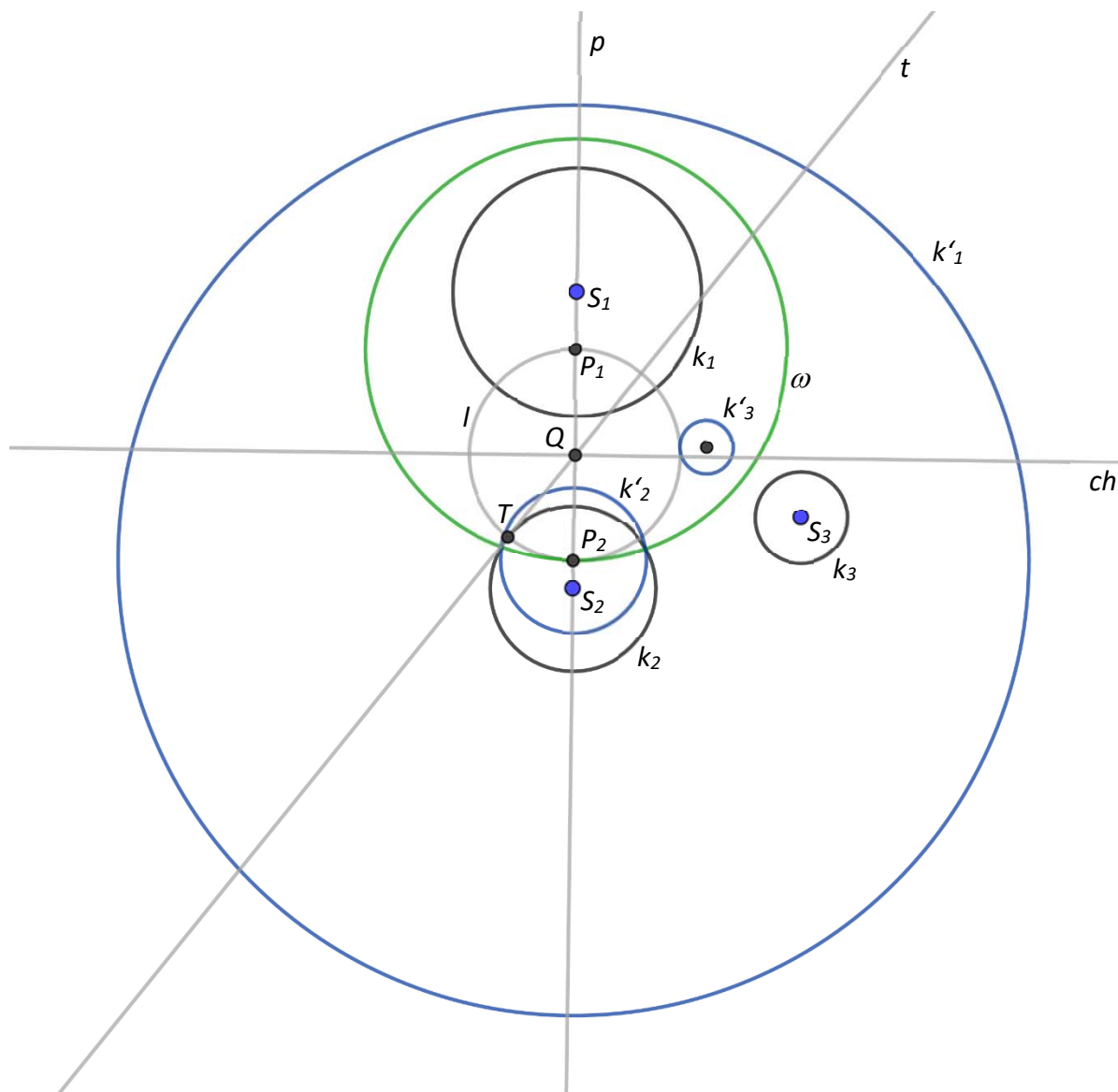
- 1) p ; $p = S_1 S_2$
- 2) ch ; $ch(k_1, k_2)$, chordála kružnic k_1, k_2
- 3) Q ; $Q = p \cap ch$
- 4) t ; tečna z bodu Q ke kružnici k_2
- 5) T ; $T \in t \cap k_2$, bod dotyku tečny t ke kružnici k_2
- 6) $l(Q, |QT|)$
- 7) P_1, P_2 ; $\{P_1, P_2\} = l \cap p$
- 8) $i(\omega)$; $\omega(P_1, |P_1 P_2|)$
- 9) k_1', k_2', k_3' ; $k_1' = i(k_1)$, $k_2' = i(k_2)$, $k_3' = i(k_3)$

Průvodce studiem

Nyní si provedeme jen tuto dílčí část konstrukce, kterou jsme si popsali v popisu konstrukce. Tím se naše obecné zadání Apolloniovy úlohy kkk změní na úlohu stejného typu jen se speciálním rozložením zadaných kružnic.

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Konstrukce:



Průvodce studiem

Nyní již máme Apolloniovu úlohu kkk dle bodu d) viz str. 4

... d) Jsou-li kružnice k_1, k_2 soustředné ($r_1 < r_2$) a kružnice k_3 neleží ani ve vnější oblasti kružnice k_2 ani ve vnitřní oblasti kružnice k_1 , úloha může mít až 8 řešení, řešíme užitím množin bodů daných vlastností (MBDV)...

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Rozbor:

Střed S hledané kružnice k leží v průniku množin $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$, kde $\mathcal{M}_1$ je množina středů všech kružnic, které se dotýkají dvou soustředných kružnic k_1, k_2 a $\mathcal{M}_2$ je množina středů všech kružnic daného poloměru dotýkajících se dané kružnice k_3 . Množina $\mathcal{M}_1$ jsou dvě kružnice

m_{11}, m_{12} , kde $m_{11} \left(S'_1, \frac{r'_1 + r'_2}{2} \right)$ je množina středů všech kružnic, které mají s kružnicí k_2 vnitřní

dotyk a s kružnicí k_1 vnější dotyk a $m_{12} \left(S'_1, \frac{r'_1 - r'_2}{2} \right)$ je množina středů všech kružnic, které mají

vnitřní dotyk s oběma kružnicemi k_1, k_2 . Množinu $\mathcal{M}_2$ tvoří dvě dvojice soustředných kružnic

$m_{21}, m_{22}, m_{23}, m_{24}$ se středem v S'_3 a poloměry $r'_3 + \frac{r'_1 - r'_2}{2}$, $r'_3 + \frac{r'_1 + r'_2}{2}$, $r'_3 - \frac{r'_1 - r'_2}{2}$ a $r'_3 - \frac{r'_1 + r'_2}{2}$.

Popis konstrukce:

$\mathcal{M}_1; \mathcal{M}_1 = \{m_{11}, m_{12}\}$

1) $m_{11}; m_{11} \left(S'_1 = P_2, \frac{r'_1 + r'_2}{2} \right)$

2) $m_{12}; m_{12} \left(S'_1 = P_2, \frac{r'_1 - r'_2}{2} \right)$

$\mathcal{M}_2; \mathcal{M}_2 = \{m_{21}, m_{22}, m_{23}, m_{24}\}$

3) $m_{21}; m_{21} \left(S'_3, r'_3 + \frac{r'_1 - r'_2}{2} \right)$

4) $m_{22}; m_{22} \left(S'_3, r'_3 + \frac{r'_1 + r'_2}{2} \right)$

5) $m_{23}; m_{23} \left(S'_3, r'_3 - \frac{r'_1 - r'_2}{2} \right)$

6) $m_{24}; m_{24} \left(S'_3, r'_3 - \frac{r'_1 + r'_2}{2} \right)$

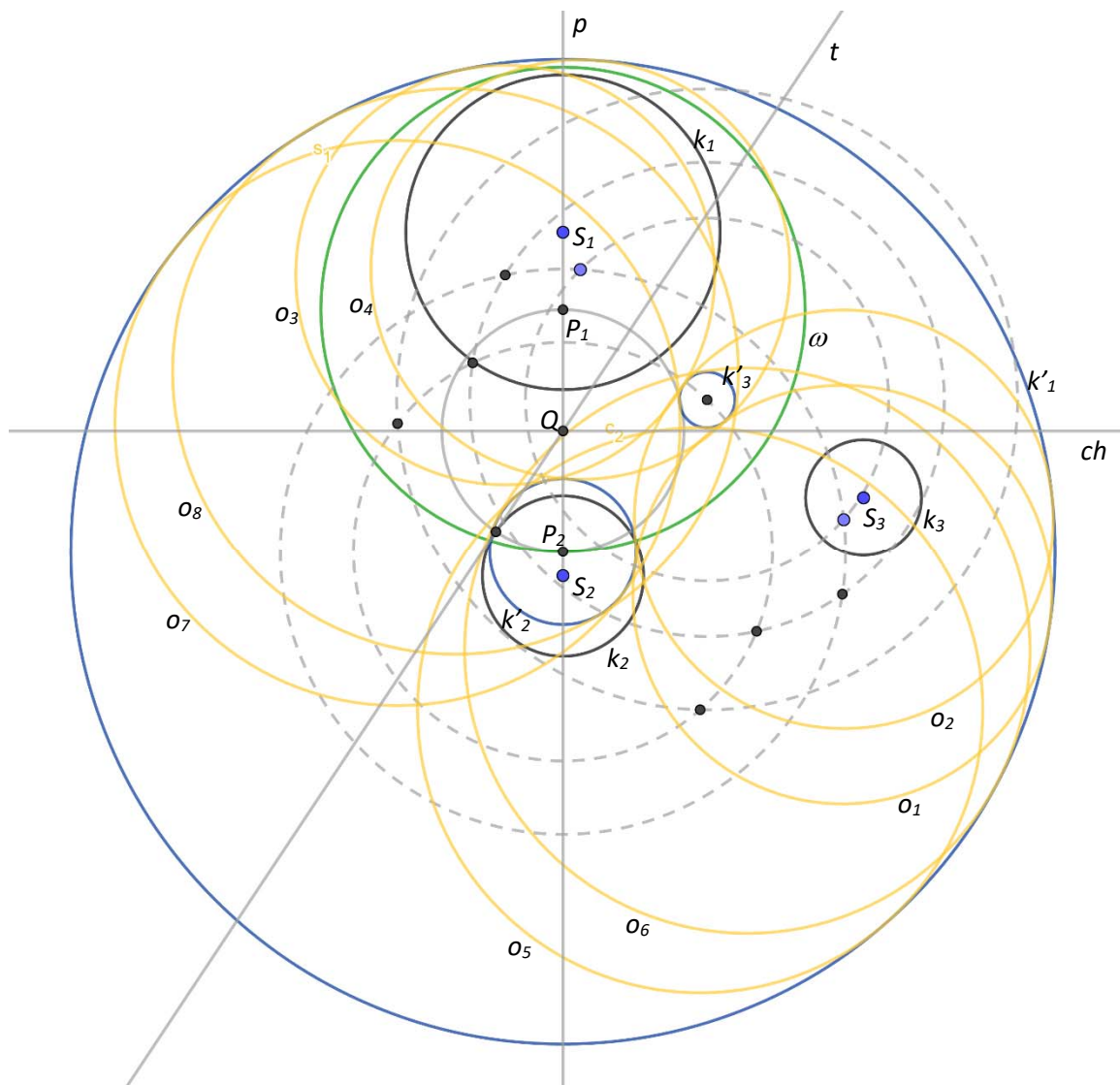
7) $O_i; O_i = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = m_{1j} \cap m_{2k}; j = 1, 2; k = 1, 2, 3, 4; i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

8) $o_i; o_i \left(O_i, \frac{r'_1 - r'_2}{2} \right), i = 1, 2, 3, 4$

9) $o_i; o_i \left(O_i, \frac{r'_1 + r'_2}{2} \right), i = 5, 6, 7, 8$

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Konstrukce:



Průvodce studiem

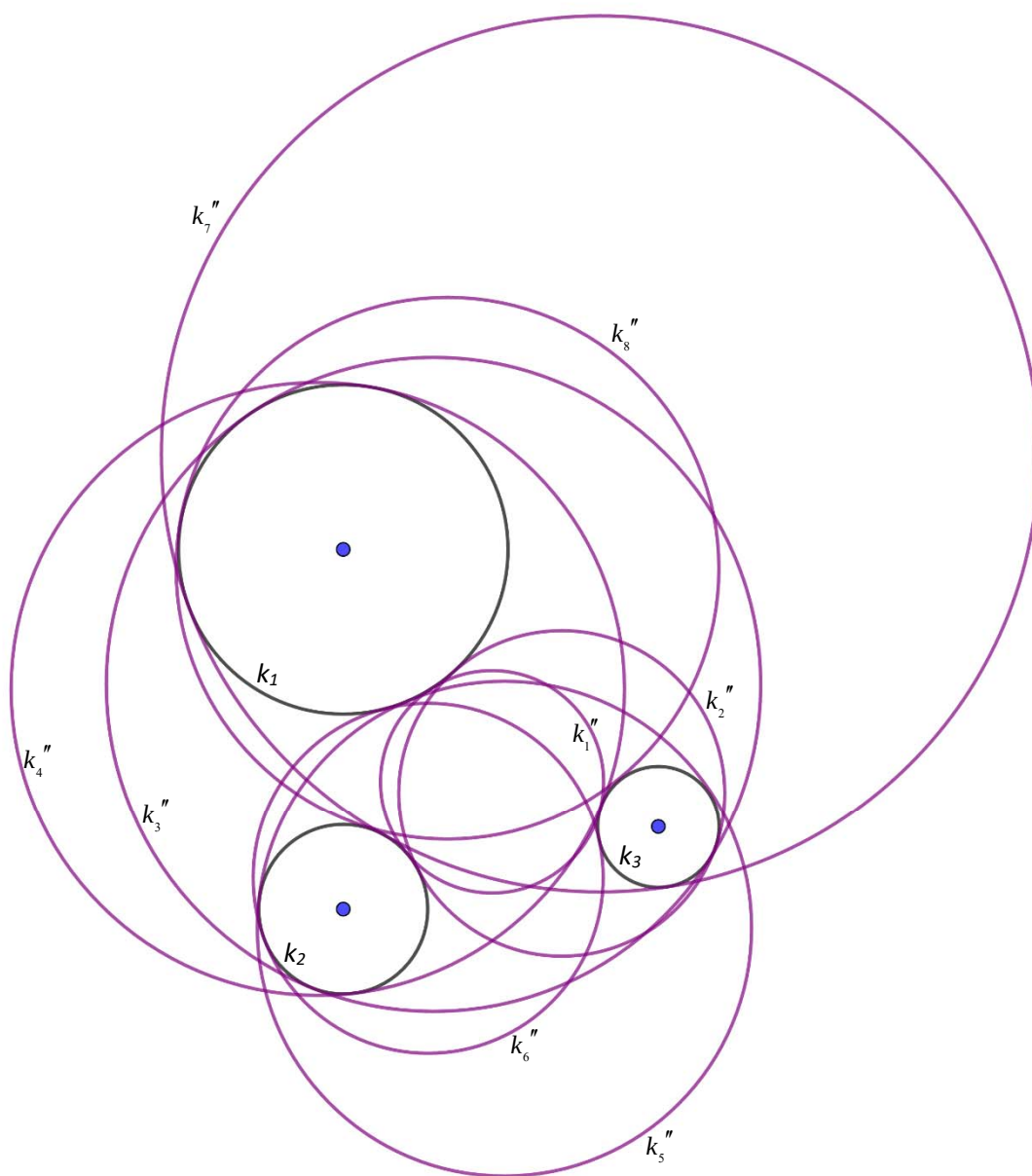
Nyní jsme vyřešili upravenou Apolloniovu úlohu kkk , kde dvě kružnice byly kruhovou inverzí převedeny na soustředné kružnice. Získané kružnice $o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6, o_7, o_8$ jsou obrazy v kruhové inverzi $i(\omega)$ hledaných kružnic původního zadání Apolloniovy úlohy kkk . Nyní zpětně díky involuci kruhové inverze zobrazíme získané kružnice o_i na původně hledané kružnice $k_1'', k_2'', k_3'', k_4'', k_5'', k_6'', k_7'', k_8''$.

$$1)-8) \ i_{\omega}(o_i) = k_i'', \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

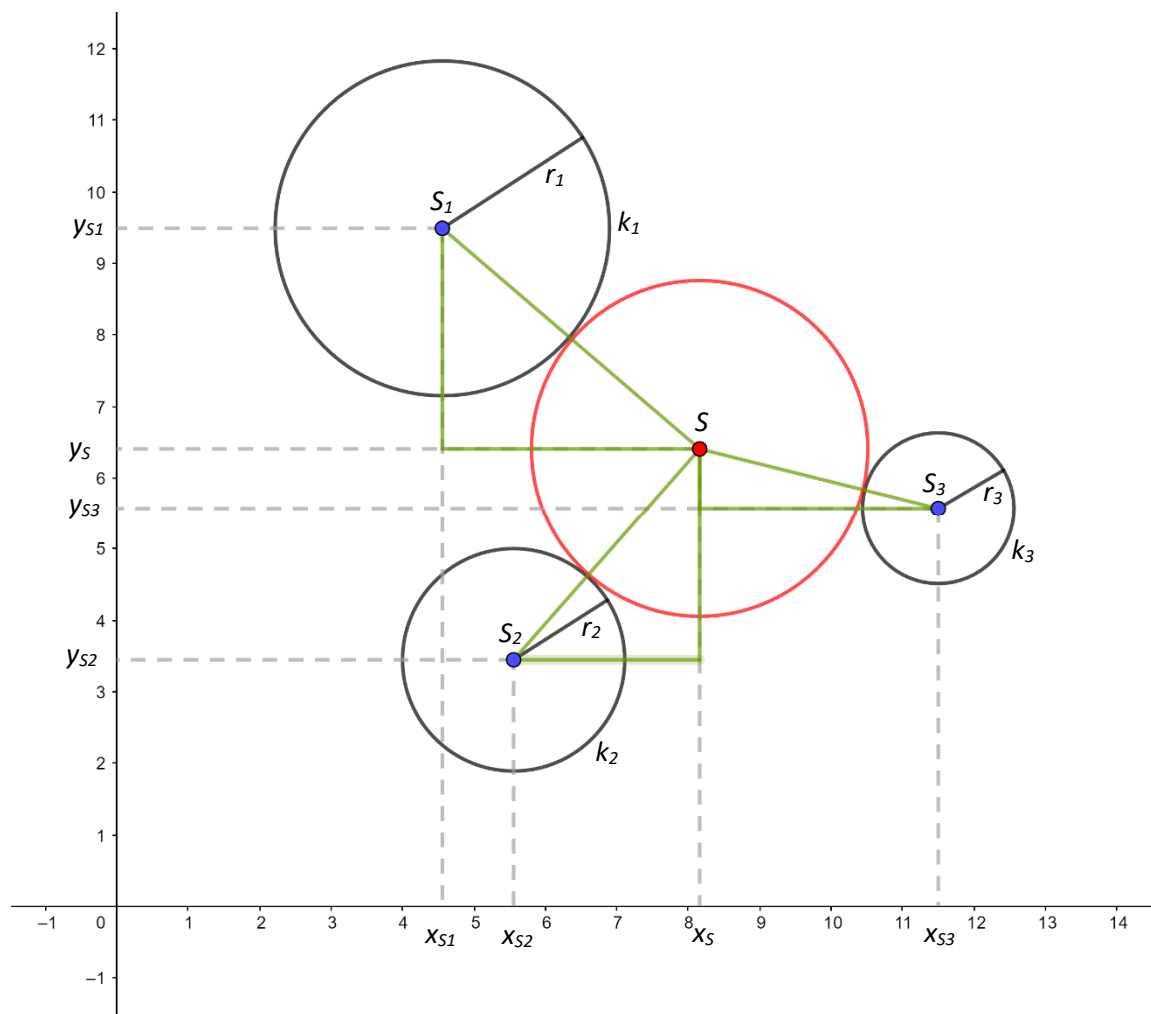
Průvodce studiem

Pro přehlednost řešení si zobrazíme samostatně zadání úlohy (k_1, k_2, k_3) a její řešení (hledané kružnice $k_1'', k_2'', k_3'', k_4'', k_5'', k_6'', k_7'', k_8''$).



Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Analytické řešení



Průvodce studiem

Výpočet středu hledané kružnice a následně velikosti poloměru hledané kružnice budeme realizovat pro jednu z osmi hledaných kružnic (červená – viz obrázek). Princip výpočtu pro ostatní hledané kružnice je stejný.

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Pro zadané kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, $k_3(S_3, r_3)$ a hledanou kružnici $k(S, r)$ platí dle Pythagorovy věty následující vztahy:

$$(x_s - x_{s1})^2 + (y_s - y_{s1})^2 = (r + r_1)^2$$

$$(x_s - x_{s2})^2 + (y_s - y_{s2})^2 = (r + r_2)^2$$

$$(x_s - x_{s3})^2 + (y_s - y_{s3})^2 = (r + r_3)^2$$

$$(1): x_s^2 - 2x_s x_{s1} + x_{s1}^2 + y_s^2 - 2y_s y_{s1} + y_{s1}^2 = r^2 + 2rr_1 + r_1^2$$

$$(2): x_s^2 - 2x_s x_{s2} + x_{s2}^2 + y_s^2 - 2y_s y_{s2} + y_{s2}^2 = r^2 + 2rr_2 + r_2^2$$

$$(3): x_s^2 - 2x_s x_{s3} + x_{s3}^2 + y_s^2 - 2y_s y_{s3} + y_{s3}^2 = r^2 + 2rr_3 + r_3^2$$

$$(2)-(1): x_s(2x_{s1} - 2x_{s2}) + y_s(2y_{s1} - 2y_{s2}) + r(2r_1 - 2r_2) - x_{s1}^2 + x_{s2}^2 - y_{s1}^2 + y_{s2}^2 + r_1^2 - r_2^2 = 0$$

$$(3)-(1): x_s(2x_{s1} - 2x_{s3}) + y_s(2y_{s1} - 2y_{s3}) + r(2r_1 - 2r_3) - x_{s1}^2 + x_{s3}^2 - y_{s1}^2 + y_{s3}^2 + r_1^2 - r_3^2 = 0$$

Z první rovnice vyjádříme x_s (v závislosti na y_s a r),

$$x_s = \frac{y_s(2y_{s2} - 2y_{s1}) + r(2r_2 - 2r_1) + x_{s1}^2 - x_{s2}^2 + y_{s1}^2 - y_{s2}^2 - r_1^2 + r_2^2}{2x_{s1} - 2x_{s2}}$$

a dosadíme do druhé rovnice,

$$\begin{aligned} & y_s \left[(2y_{s2} - 2y_{s1})(2x_{s1} - 2x_{s3}) + (2y_{s1} - 2y_{s3})(2x_{s1} - 2x_{s2}) \right] + \dots \\ & \dots + r \left[(2r_2 - 2r_1)(2x_{s1} - 2x_{s3}) + (2r_1 - 2r_3)(2x_{s1} - 2x_{s2}) \right] + \dots \\ & \dots + (x_{s1}^2 - x_{s2}^2 + y_{s1}^2 - y_{s2}^2 - r_1^2 + r_2^2)(2x_{s1} - 2x_{s3}) + \dots \\ & \dots + (-x_{s1}^2 + x_{s3}^2 - y_{s1}^2 + y_{s3}^2 + r_1^2 - r_3^2)(2x_{s1} - 2x_{s2}) = 0 \end{aligned}$$

Z této rovnice vyjádříme y_s (v závislosti na r),

$$\begin{aligned} y_s &= \frac{r \left[(2r_1 - 2r_2)(2x_{s1} - 2x_{s3}) + (2r_3 - 2r_1)(2x_{s1} - 2x_{s2}) \right]}{(2y_{s2} - 2y_{s1})(2x_{s1} - 2x_{s3}) + (2y_{s1} - 2y_{s3})(2x_{s1} - 2x_{s2})} + \dots \\ & \dots + \frac{(-x_{s1}^2 + x_{s2}^2 - y_{s1}^2 + y_{s2}^2 + r_1^2 - r_2^2)(2x_{s1} - 2x_{s3})}{(2y_{s2} - 2y_{s1})(2x_{s1} - 2x_{s3}) + (2y_{s1} - 2y_{s3})(2x_{s1} - 2x_{s2})} + \dots \\ & \dots + \frac{(x_{s1}^2 - x_{s3}^2 + y_{s1}^2 - y_{s3}^2 - r_1^2 + r_3^2)(2x_{s1} - 2x_{s2})}{(2y_{s2} - 2y_{s1})(2x_{s1} - 2x_{s3}) + (2y_{s1} - 2y_{s3})(2x_{s1} - 2x_{s2})} \end{aligned}$$

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

a dosadíme do výrazu pro x_s (získáme tak vyjádření obou souřadnic hledaného středu $S[x_s; y_s]$ v závislosti pouze na r).

$$\begin{aligned} x_s = & \frac{r[(2r_1 - 2r_2)(2x_{s1} - 2x_{s3}) + (2r_3 - 2r_1)(2x_{s1} - 2x_{s2})](2y_{s2} - 2y_{s1})}{[(2y_{s2} - 2y_{s1})(2x_{s1} - 2x_{s3}) + (2y_{s1} - 2y_{s3})(2x_{s1} - 2x_{s2})](2x_{s1} - 2x_{s2})} + \dots \\ & \dots + \frac{(-x_{s1}^2 + x_{s2}^2 - y_{s1}^2 + y_{s2}^2 + r_1^2 - r_2^2)(2x_{s1} - 2x_{s3})(2y_{s2} - 2y_{s1})}{[(2y_{s2} - 2y_{s1})(2x_{s1} - 2x_{s3}) + (2y_{s1} - 2y_{s3})(2x_{s1} - 2x_{s2})](2x_{s1} - 2x_{s2})} + \dots \\ & \dots + \frac{(x_{s1}^2 - x_{s3}^2 + y_{s1}^2 - y_{s3}^2 - r_1^2 + r_3^2)(2x_{s1} - 2x_{s2})(2y_{s2} - 2y_{s1})}{[(2y_{s2} - 2y_{s1})(2x_{s1} - 2x_{s3}) + (2y_{s1} - 2y_{s3})(2x_{s1} - 2x_{s2})](2x_{s1} - 2x_{s2})} + \dots \\ & \dots + \frac{[r(2r_2 - 2r_1) + x_{s1}^2 - x_{s2}^2 + y_{s1}^2 - y_{s2}^2 - r_1^2 + r_2^2](2y_{s2} - 2y_{s1})(2x_{s1} - 2x_{s3})}{[(2y_{s2} - 2y_{s1})(2x_{s1} - 2x_{s3}) + (2y_{s1} - 2y_{s3})(2x_{s1} - 2x_{s2})](2x_{s1} - 2x_{s2})} + \dots \\ & \dots + \frac{[r(2r_2 - 2r_1) + x_{s1}^2 - x_{s2}^2 + y_{s1}^2 - y_{s2}^2 - r_1^2 + r_2^2](2y_{s1} - 2y_{s3})(2x_{s1} - 2x_{s2})}{[(2y_{s2} - 2y_{s1})(2x_{s1} - 2x_{s3}) + (2y_{s1} - 2y_{s3})(2x_{s1} - 2x_{s2})](2x_{s1} - 2x_{s2})} \end{aligned}$$

Průvodce studiem

Tento výraz pro x_s by si zasloužil ještě další úpravy (roznásobit, sloučit společné hodnoty či neznámé, povytýkat apod.). Již nechám na samotném čtenáři. Výraz je také zapsán jako součet několika sčítanců ve formě zlomků se stejným jmenovatelem z důvodu rozdělení na několik řádků. Standardně by byl zapsán jedním zlomkem s tímto společným jmenovatelem. V upravené podobě by se určitě dále s daným výrazem pracovalo jednodušeji a přehledněji.

Nyní když dosadíme výrazy pro x_s a y_s do některé z původních rovnic (1), (2) nebo (3), dostaneme jednu kvadratickou rovnici o jedné neznámé r .

Tím získáme obecný předpis pro výpočet poloměru r hledané kružnice k v závislosti pouze na známých zadaných hodnotách $x_{s1}, y_{s1}, r_1, x_{s2}, y_{s2}, r_2, x_{s3}, y_{s3}, r_3$.

Tento předpis pro r dosadíme do rovnic pro výpočet souřadnic x_s a y_s , tím získáme předpisy pro výpočet souřadnic středu $S[x_s; y_s]$ hledané kružnice v závislosti pouze na známých zadaných hodnotách $x_{s1}, y_{s1}, r_1, x_{s2}, y_{s2}, r_2, x_{s3}, y_{s3}, r_3$.

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Průvodce studiem

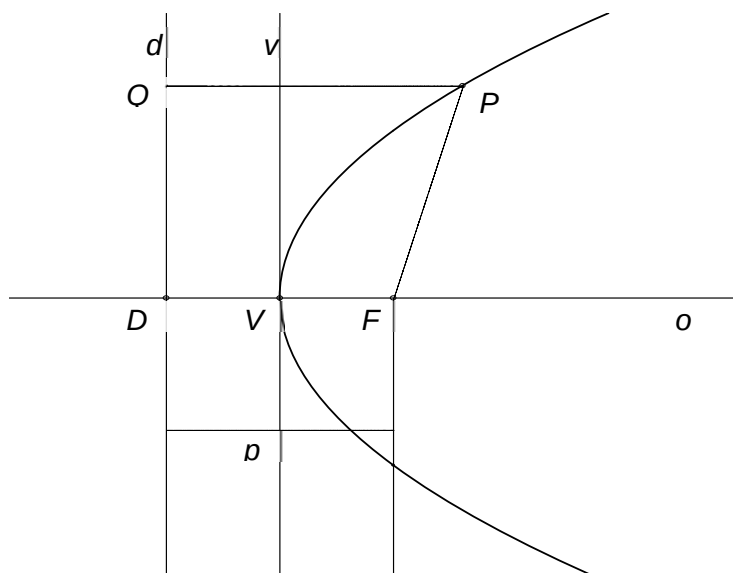
Na závěr si ukážeme jedno elegantní řešení Apolloniovy úlohy *kkk* metodou MBDV. Množiny bodů daných vlastností nemusí být jen snadno konstruovatelné geometrické útvary, jako je přímka nebo kružnice, ale mohou to být i regulární kuželosečky (parabola, elipsa, hyperbola). I když tyto kuželosečky představují množiny bodů daných vlastností v rovině, není jejich konstrukce běžnými rýsovacími potřebami jednoduchá a hlavně přesná. Přesně dle definice dokážeme sestavit pouze jednotlivé body dané kuželosečky.

Zde se výhodně uplatňují nástroje ICT. Nejen pro konstrukční úlohy je dnes velmi populární nástroj dynamické geometrie GeoGebra. Tato aplikace je dostupná pro všechny platformy včetně mobilních zařízení i v online režimu. Popularitu si nezískal jen díky volné dostupnosti, ale hlavně díky možnostem, které nabízí a jednoduchostí ovládání.

Tuto aplikaci nyní použijeme především proto, že dokáže přesně vykreslit uvedené regulární kuželosečky, které budeme potřebovat k vyřešení naší Apolloniovy úlohy *kkk*.

Parabola

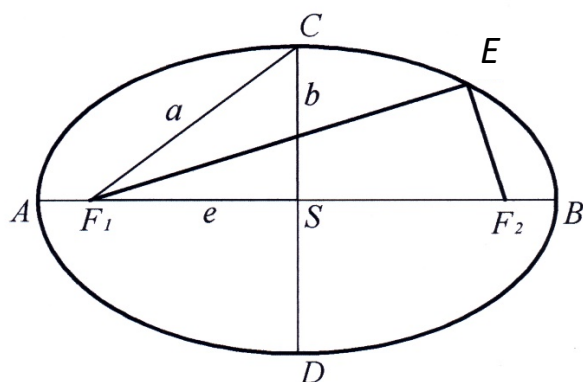
Definice: Parabola je množina všech bodů P v rovině, které mají od daného bodu F (ohnisko) a od dané přímky d (řídící přímka), která tímto bodem neprochází, stejné vzdálenosti.



Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

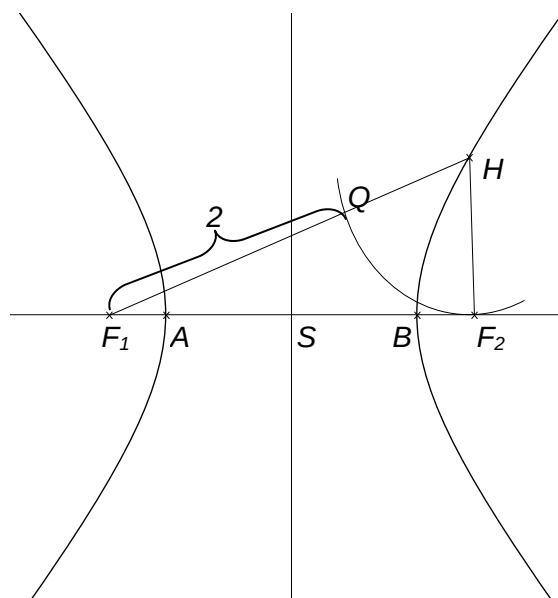
Elipsa

Definice: Elipsa je množina všech bodů E v rovině, které mají od dvou daných různých bodů F_1, F_2 (ohniska), konstantní součet vzdáleností větší než vzdálenost bodů F_1, F_2 .



Hyperbola

Definice: Hyperbola je množina všech bodů H v rovině, které mají od dvou různých daných bodů F_1, F_2 konstantní kladný rozdíl vzdáleností $2a$ menší než je vzdálenost bodů F_1, F_2 .

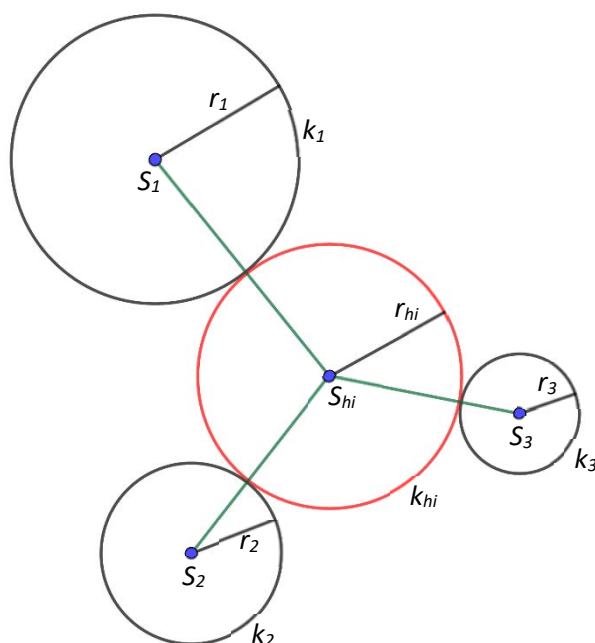


Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Průvodce studiem

Již víme, že naše Apolloniova úloha kkk má osm řešení. Ukážeme si princip hledání řešení této úlohy pomocí kuželoseček na jednom případě (viz následující Rozbor). Při řešení úlohy kkk se z regulárních kuželoseček uplatňují jen elipsy a hyperboly v závislosti na polohových a metrických vlastnostech zadaných kružnic a na konkrétní hledané kružnici. Další rozbory již na stejném principu nechávám na čtenáři. V závěru ukáži všech osm hledaných kružnic.

Rozbor:



Z polohových a metrických vlastností bodu S_{hi} hledané kružnice k_{hi} s poloměrem r_{hi} vůči daným středům a poloměrům zadaných kružnic $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, $k_3(S_3, r_3)$ plynou následující vztahy:

$$(1): |S_{hi}S_1| = r_{hi} + r_1$$

$$(2): |S_{hi}S_2| = r_{hi} + r_2$$

$$(3): |S_{hi}S_3| = r_{hi} + r_3$$

Tyto tři vztahy můžeme nakombinovat do tří dvojic a vztahovat postupně sledované vlastnosti středu a poloměru hledané kružnice vždy k středům a poloměrům dvou daných kružnic.

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

$$(1), (2): \begin{cases} |S_{hi}S_1| = r_{hi} + r_1 \\ |S_{hi}S_2| = r_{hi} + r_2 \end{cases}$$

Pro hledání možné pozice bodu S_{hi} z dané soustavy eliminujeme neznámou r_{hi} . Provedeme např. vyjádřením r_{hi} z jedné rovnice a dosazením do druhé.

Z první rovnice $r_{hi} = |S_{hi}S_1| - r_1$, po dosazení do druhé rovnice $|S_{hi}S_2| = |S_{hi}S_1| - r_1 + r_2$.

Po úpravě na tvar $|S_{hi}S_1| - |S_{hi}S_2| = r_1 - r_2$ dostáváme předpis udávající vlastnost bodů hyperboly v souladu s uvedenou definicí. Bod S_{hi} je bodem hyperboly, Body S_1, S_2 jsou ohniska a konstanta $2a = r_1 - r_2 \cdot [\mathcal{H}_1(S_1, S_2, r_1 - r_2)]$.

$$(1), (3): \begin{cases} |S_{hi}S_1| = r_{hi} + r_1 \\ |S_{hi}S_3| = r_{hi} + r_3 \end{cases}$$

Z první rovnice $r_{hi} = |S_{hi}S_1| - r_1$, po dosazení do druhé rovnice $|S_{hi}S_3| = |S_{hi}S_1| - r_1 + r_3$.

Po úpravě na tvar $|S_{hi}S_1| - |S_{hi}S_3| = r_1 - r_3$ dostáváme předpis pro hyperbolu, kde Bod S_{hi} je bodem hyperboly, Body S_1, S_3 jsou ohniska a konstanta $2a = r_1 - r_3 \cdot [\mathcal{H}_2(S_1, S_3, r_1 - r_3)]$.

$$(2), (3): \begin{cases} |S_{hi}S_2| = r_{hi} + r_2 \\ |S_{hi}S_3| = r_{hi} + r_3 \end{cases}$$

Z první rovnice $r_{hi} = |S_{hi}S_2| - r_2$, po dosazení do druhé rovnice $|S_{hi}S_3| = |S_{hi}S_2| - r_2 + r_3$.

Po úpravě na tvar $|S_{hi}S_2| - |S_{hi}S_3| = r_2 - r_3$ dostáváme předpis pro hyperbolu, kde Bod S_{hi} je bodem hyperboly, Body S_2, S_3 jsou ohniska a konstanta $2a = r_2 - r_3 \cdot [\mathcal{H}_3(S_2, S_3, r_2 - r_3)]$.

Střed S_{hi} hledané kružnice k_{hi} tedy budeme hledat jako průsečík definovaných hyperbol.

$$S_{hi} \in \mathcal{H}_1(S_1, S_2, r_1 - r_2) \cap \mathcal{H}_2(S_1, S_3, r_1 - r_3) \cap \mathcal{H}_3(S_2, S_3, r_2 - r_3)$$

Poloměr hledané kružnice $r_{hi} = |S_{hi}P_i|$, kde P_i je bod dotyku se zadanou kružnicí. Bod dotyku dvou kružnic je bodem přímky „středné“. Např. pro bod dotyku hledané kružnice se zadanou kružnicí k_1 platí: $P_i = k_1 \cap \leftrightarrow S_{hi}S_1$.

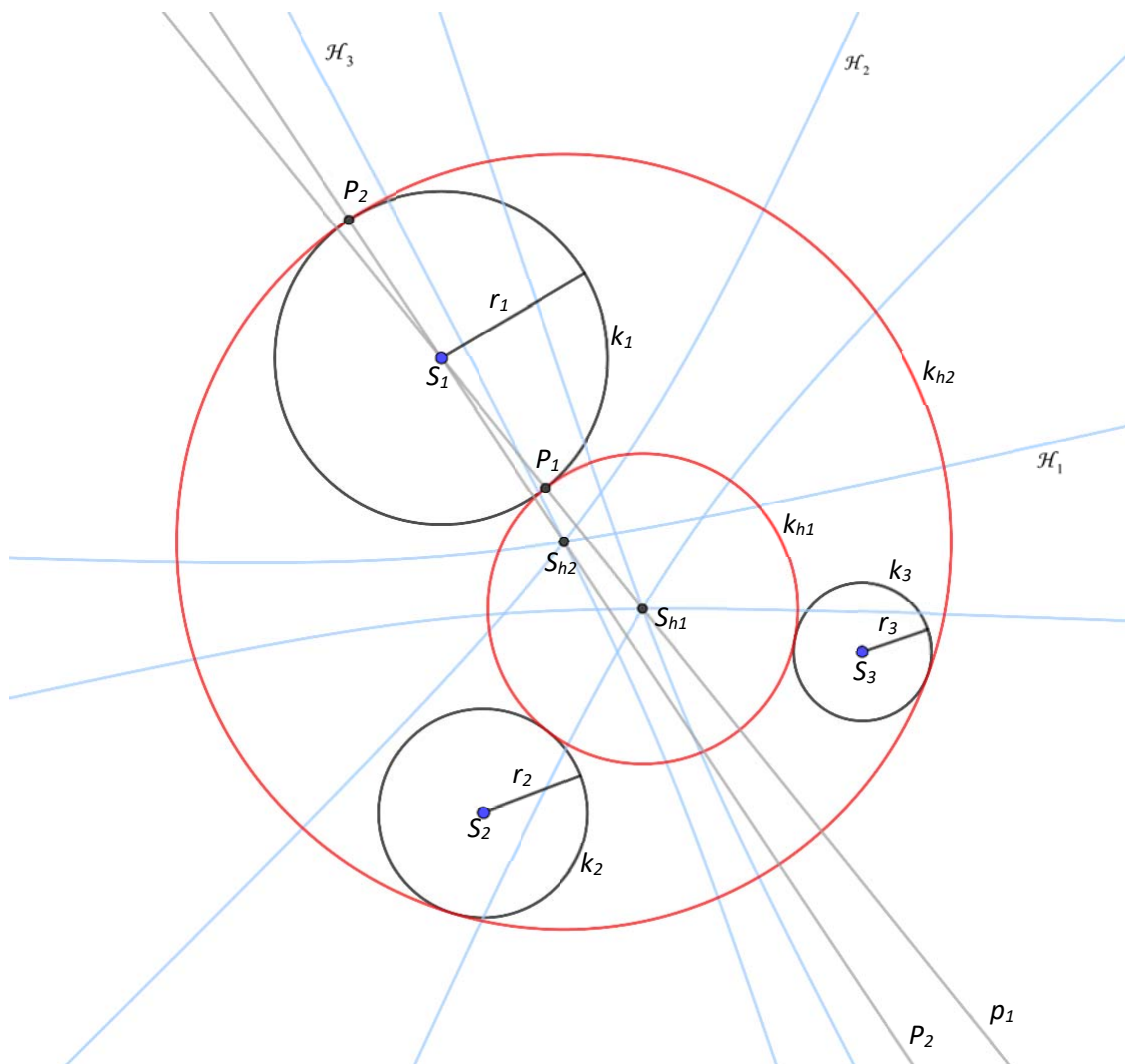
Hledaná kružnice $k_{hi} = k_{hi}(S_{hi}, |S_{hi}P_i|)$.

Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Popis konstrukce:

- 1) $\mathcal{H}_1(S_1, S_2, 2a = r_1 - r_2)$
- 2) $\mathcal{H}_2(S_1, S_3, 2a = r_1 - r_3)$
- 3) $\mathcal{H}_3(S_2, S_3, 2a = r_2 - r_3)$
- 4) $S_{hi}; S_{hi} \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_3, i = 1, 2$
- 5) $p_i; p_i = \leftrightarrow S_{hi}S_1$
- 6) $P_i; P_i \in k_1 \cap p_i$
- 7) $k_{hi}; k_{hi}(S_{hi}, |S_{hi}P_i|)$

Konstrukce:

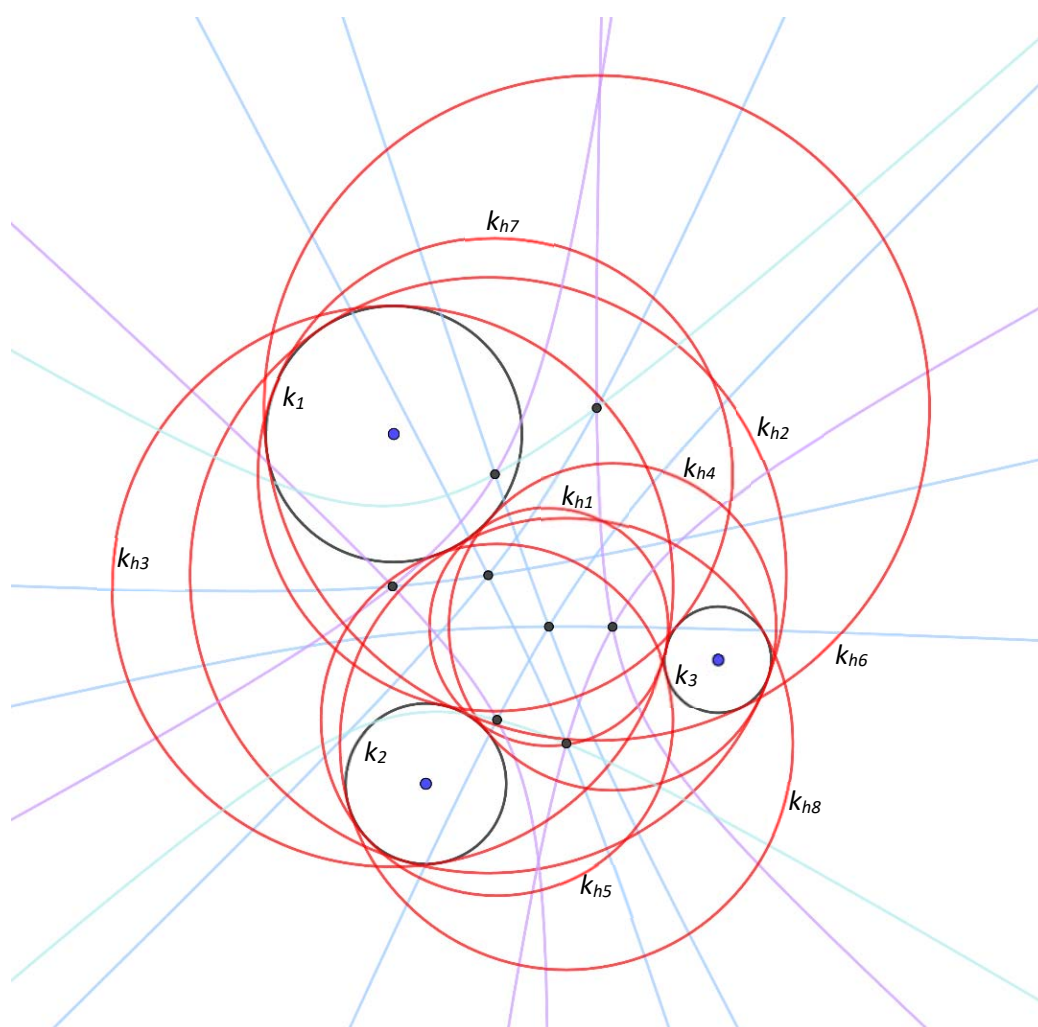


Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Průvodce studiem

Při rozboru prvního případu jsme vypočítali předpisy pro tři hyperboly. Získali jsme dva společné body všech tří hyperbol – dva středy hledaných kružnic, tudíž dvě řešení z osmi – dvě hledané kružnice k_{hi} . Při dalších rozbořích dalších případů hledaných kružnic se vždy dopočítáme k předpisům pro tři hyperboly. V druhém kroku vypočítáme další dvě nové hyperboly, třetí již bude totožná s jednou z předchozích. Ve třetím kroku vypočítáme nový předpis již jen pro jednu hyperbolu, dvě již budou totožné s předchozími a v posledním čtvrtém kroku se již dopočítáme jen k předpisům hyperbol známých z předchozích kroků. Celkem tedy sestrojíme šest různých hyperbol. Hledané středy S_{hi} jsou vždy průsečíky tří hyperbol. Poloměry r_i získáme stejným způsobem jako v prvním případě a tím získáme všechna řešení – všech osm kružnic k_{hi} ($k_{h1}, k_{h2}, k_{h3}, k_{h4}, k_{h5}, k_{h6}, k_{h7}, k_{h8}$).

Výsledné řešení touto metodou je na následujícím obrázku.



Podpora moderních trendů ve vzdělávání v pregraduální přípravě budoucích pedagogických pracovníků na Univerzitě Palackého v Olomouci

Závěr

Cílem studijního textu bylo seznámit vás s některými možnostmi řešení Apolloniovy úlohy jakožto vhodného příkladu k tomu, abychom si mohli ukázat, jak je efektivní využívat nástrojů ICT k řešení matematických problémů, třeba i tak starých a mnohokrát mnoha způsoby vyřešených, jako je tato úloha.

Způsobů řešení této úlohy je již mnoho za ta staletí, po která je známa a vždy zaujímala významné postavení a budila zájem matematiků i studentů, neboť při jejím řešení můžeme uplatnit mnoho matematických poznatků a občas ještě přijít i s nějakou elegantnější metodou řešení.

Jednou z těchto novějších možností je řešení za podpory ICT. Nejen, že veškeré konstrukce v tomto textu byly vytvořeny pomocí nástrojů dynamické geometrie GeoGebra, čímž jsou konstrukce mnohem pěknější, jednodušší, názornější apod., ale především jsme si mohli ukázat i řešení metodou, která by byla bez těchto možností ICT nerealizovatelná. Metody řešení využívající množin modů daných vlastností (MBDV) budou určitě patřit k nejstarším metodám, ale především se jedná o využití takových MBDV, které jsou sestrojitelné pomocí pravítka, kružítka, tj. především různě definovaných přímek a kružnic. K tomuto účelu jsem jednu takovou metodu pro srovnání také zvolil.

Jistě byly již velmi dávno známy i možnosti využít k řešení této úlohy takových MBDV, jakými jsou kuželosečky, ale konstruování těchto křivek již není tak jednoduché a především není způsobem tužka, pravítko, kružítko, popř. i křivítko tak přesné. Nalezení konkrétního bodu v rovině (středu hledané kružnice) jakožto průsečíku křivek ale vyžaduje absolutní přesnost. Tuto možnost nám nabízí počítače a příslušné softwarové nástroje. Digitální technologie nemusí přinášet nové poznatky, jen je potřeba je umět efektivně využívat i při zpracovávání poznatků dřívějších a řešení problémů lidstvu dávno známých.

Doporučená literatura

Hodaňová, J., Nocar, D., Vaněk, V. (2005). *Konstrukční geometrie I. Kuželosečky*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.

Holubář, J. (1949). *O metodách rovinných konstrukcí (Úloha Apolloniova a úlohy příbuzné)*. Praha: Jednota československých matematiků a fysiků.

Pirklová, P. (2013). *Množiny bodů daných vlastností, mocnost bodu ke kružnici*. Liberec: Technická univerzita v Liberci.

Říha, O. (2010). *Kruhová inverze*. 1. vydání. Brno: Masarykova univerzita.

Sklenáriková Z. (2004). K metodám riešenia Apolloniovej úlohy. In: *Matematika v proměnách věků III, Edice Dějiny matematiky*. Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy.

Vančura, J. (2008). *Apolloniovy Úlohy*. [online]. Dostupné z <http://www.apolloniovyulohy.webz.cz/>.

Voráčková, Š. (2012). *Atlas geometrie*. Praha: Academia.