Okruhy témat k závěrečným zkouškám rozšiřujícího studia

Matematika – učitelství pro 2. stupeň základních škol

Matematická analýza

1. Funkce. Pojem funkce, elementární funkce, jejich definice, průběh a graf.

2. Limita. Vlastní a nevlastní limita funkce v bodě, limita funkce v nevlastním bodě, spojitost funkce v bodě a intervalu. (Cauchyho a Heineho definice limity funkce v bodě).

3. Derivace. Derivace funkce v bodě a v intervalu, geometrický a fyzikální význam pojmu derivace.

4. Derivace vyšších řádů a jejich využití při úlohách na extrémy. (Výpočet lokálního minima a maxima).

5. Využití derivací k vyšetřování průběhu funkce jedné proměnné a sestrojování grafu funkce (definiční obor, monotónnost, lokální a absolutní extrémy, konvexnost, konkávnost, inflexní body, asymptoty).

6. Funkce dvou proměnných. Definiční obor, limita v bodě, spojitost v bodě a v oblasti. Parciální derivace a jejich geometrický význam, totální diferenciál a souvislost s tečnou rovinou v bodě plochy.

7. Neurčitý integrál a základní metody integrace (metoda substituční, per partes, integrace racionální funkce, integrace goniometrických funkcí).

8. Určitý Riemannův integrál. Definice, základní vlastnosti. Způsob užití v geometrii (výpočet obsahu rovinného obrazce, výpočet délky oblouku křivky, výpočet objemu rotačních těles, výpočet obsahu rotační plochy).

9. Číselné posloupnosti a číselné řady. Limita posloupnosti. Aritmetické a geometrické posloupnosti. (Vzorce pro n-tý člen posloupnosti a pro součet prvních n členů posloupnosti.) Číselné řady, jejich konvergence a divergence. Řady s nezápornými členy, alternující řady, řady s libovolnými členy, kriteria konvergence.

10. Taylorův a Maclaurinův vzorec a Taylorova a Maclaurinova řada funkce jedné proměnné. Rozvoje elementárních funkcí.

Algebra a Aritmetika:

1. Základy matematické logiky – Výrok, složený výrok, výroková formule, tabulky pravdivostních hodnot výrokových formulí. Výroková forma, kvantifikátory. Důkazy matematických vět. Axiomatická výstavba matematických teorií (primitivní pojmy, axiomy), vlastnosti axiomatických systémů (bezespornost, úplnost, nezávislost).

2. Základní poznatky o množinách a relacích – Množina, určení množiny, vztahy mezi množinami, množinové operace a jejich vlastnosti. Binární relace na množině, vlastnosti binárních relací, relace ekvivalence, rozklad množiny, relace uspořádání – konkrétní příklady ze školské matematiky. Zobrazení, typy zobrazení. Ekvivalentní množiny a podobné dobře uspořádané množiny.

3. Algebraické struktury s jednou binární operací – Binární operace na množině a její vlastnosti. Grupoid, pologrupa, monoid, grupa – vlastnosti a konkrétní příklady. Podgrupoid. Faktorový grupoid podle kongruence. Homomorfismus a izomorfismus grupoidů. Věta o homomorfismu grupoidů.

4. Algebraické struktury se dvěma binárními operacemi – Polookruh, okruh, obor integrity, těleso – vlastnosti a konkrétní příklady. Podokruh. Homomorfismus a izomorfismus algebraických struktur se dvěma binárními operacemi.

5. Základy lineární algebry – Soustava lineárních rovnic – množina řešení soustavy včetně souvislosti s teorií vektorového prostoru. Matice – hodnost matice a její určení. Determinant čtvercové matice a jeho výpočet (Sarrusovo pravidlo, Laplaceův rozvoj). Užití matic a determinantů při řešení soustav lineárních rovnic (Frobeniova věta, Cramerovo pravidlo). Okruh čtvercových matic a jeho vlastnosti. Regulární a singulární matice.

6. Dělitelnost v oboru integrity – Relace „dělí“ v obecném oboru integrity a její vlastnosti. Jednotky, navzájem asociované prvky, vlastní a nevlastní dělitelé – konkrétní příklady. Ireducibilní prvky a prvočinitelé – jednoznačnost rozkladu prvku na součin ireducibilních prvků (Gaussovy obory integrity). Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek prvků – existence, jednoznačnost, určení. Eukleidovské obory integrity, Eukleidův algoritmus.

7. Polynomy – Funkční a algebraická definice polynomů nad obecným okruhem. Vlastnosti struktury polynomů funkčně a algebraicky definovaných. Kořen polynomu, násobnost kořene, Bezoutova věta, Hornerovo schéma. Derivace polynomů a její užití. Určení kořenů polynomu (odstraňování vícenásobných kořenů, hledání racionálních kořenů). Základní věta algebry a její důsledky.

8. Algebraické rovnice – Algebraická rovnice. Algebraická řešitelnost algebraických rovnic. Algebraická řešitelnost lineárních, kvadratických, kubických a bikvadratických rovnic. Algebraická řešitelnost rovnic stupně většího než čtyři. Binomické rovnice. Reciproké rovnice. Přibližné numerické metody řešení algebraických rovnic.

9. Grupy – Grupa a její vlastnosti, konkrétní příklady. Podgrupa, podgrupa generovaná podmnožinou. Rozklad grupy podle podgrupy, Lagrangeova věta. Faktorová grupa podle normální podgrupy a podle kogruence. Homomorfismus grup, věta o homomorfismu grup. Cyklické grupy a jejich vlastnosti.

10. Okruhy – Okruh a jeho vlastnosti, konkrétní příklady. Podokruh. Faktorový okruh podle ideálu a podle kongruence. Homomorfismus okruhů, věta o homomorfismu okruhů.

11. Přirozená čísla – Zavedení uspořádaného polookruhu přirozených čísel – Peanova aritmetika, kardinální a ordinální čísla. Důkaz a definice matematickou indukcí. Přirozená čísla v učivu ZŠ.

12. Celá čísla - Konstrukce uspořádaného oboru integrity celých čísel. Existence podoboru izomorfního s N. Uspořádání celých čísel, číselná osa, absolutní hodnota celého čísla. Zavedení celých čísel a operace s celými čísly v učivu ZŠ.

13. Racionální čísla - Konstrukce uspořádaného tělesa čísel racionálních. Existence podoboru izomorfního s oborem integrity celých čísel. Vlastnosti uspořádání racionálních čísel. Zavedení racionálních čísel v učivu ZŠ. Pojem zlomku. Racionální číslo zapsané jako číslo desetinné. Početní operace s racionálními čísly na ZŠ.

14. Těleso reálných čísel – Mezery v množině racionálních čísel, Dedekindova teorie řezů. Desetinný rozvoj racionálních a iracionálních čísel. Aproximace reálných čísel. Reálná čísla v učivu matematiky na ZŠ.

15. Komplexní čísla - Konstrukce tělesa komplexních čísel. Existence podoboru izomorfního s tělesem reálných čísel. Problém uspořádání tělesa komplexních čísel. Algebraický a goniometrický tvar komplexního čísla. Moivreova věta a její užití.

Geometrie:

1. Vektorové prostory nad tělesem. Definice, základní vlastnosti. Podprostory vektorového prostoru. Báze a dimense vektorového prostoru. Lineární kombinace vektorů. Souřadnice vektoru v dané bázi. Lineární závislost a nezávislost vektorů. Lineární zobrazení vektorových prostorů. Jádro, obraz, defekt a hodnost lineárního zobrazení. Matice lineárního zobrazení. Charakteristické vektory lineárního zobrazení.

2. Transformace souřadnic vektorů ve V_n. Matice přechodu mezi bázemi. Orientace vektorového prostoru. Vektorové prostory se skalárním součinem. Skalární součin ve V_n. Velikost vektoru,

jednotkový vektor, normovaný vektor. Odchylka dvou nenulových vektorů. Geometrický význam skalárního součinu.

3. Afinní prostory. Definice afinního prostoru. Souřadnicový systém v afinním prostoru. Bod a jeho souřadnice v A_n. Transformace souřadnic v afinním prostoru. Podprostory afinního prostoru. Parametrické a neparametrické vyjádření podprostoru afinního prostoru. Určení přímky v A_2, A_3 a roviny v A_3.

4. Vzájemná poloha podprostorů afinního prostoru A_n. Definice rovnoběžnosti afinních podprostorů. Vzájemná poloha bodů v A_1, vzájemná poloha bodů a přímek v A_2, vzájemná poloha bodů, přímek a rovin v A_3. Příčka dvou mimoběžných přímek.

5. Afinní zobrazení. Definice afinního zobrazení f prostoru A_n s asociovaným zobrazením φ. Reper afinního prostoru A_n. Matice afinního zobrazení. Analytické vyjádření afinního zobrazení. Samodružné body a samodružné směry afinního zobrazení.

6. Euklidovské prostory. Metrika a metrický prostor. Definice Euklidovského prostoru. Kartézský systém souřadnic a jeho význam. Kolmost podprostorů v E_n. Podprostory totálně kolmé. Ortogonální doplněk podprostoru v E_n. Ortogonální průmět bodu do podprostoru. Ortogonální průmět přímky do podprostoru.

7. Vzdálenost dvou podprostorů Euklidovského prostoru. Vzdálenost dvou bodů v E_n. Vzdálenost bodu od přímky v E_2 a v E_3. Vzdálenost bodu od roviny v E_3. Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek a rovin v E_3. Osa 2 mimoběžných přímek v E_3.

8. Odchylka dvou podprostorů v E_n. Vyjasnit rozdíl mezi pojmem odchylky a pojmem úhlu. Odchylka dvou vektorů. Odchylka dvou přímek. Odchylka přímky od roviny v E_3. Odchylka dvou rovin v E_3.

9. Vektorový součin. Geometrický význam a možnosti výpočtu vektorového součinu. Smíšený součin tří vektorů. Geometrický význam a možnosti výpočtu smíšeného součinu.

10. Shodná zobrazení (izometrie). Definice a vlastnosti shodných zobrazení. Souměrnost podle nadroviny, posunutí (translace) a souměrnost podle středu E_2 a v E_3. Samodružné body a směry shodných transformací. Klasifikace shodných transformací.

11. Stejnolehlost (homotetie). Definice a vlastnosti stejnolehlosti. Skládání stejnolehlostí. Mongeova věta. Mongeova grupa. Stejnolehlost dvou kružnic.

12. Podobná zobrazení. Definice a vlastnosti podobných zobrazení. Samodružné body podobných zobrazení. Grupa podobných transformací prostoru E_n. Věty o podobnosti trojúhelníků.

13. Kuželosečky. Definice kuželoseček a jejich vlastnosti, zejména vlastnosti ohniskové. Konstrukce paraboly, hyperboly a elipsy. Rovnice kuželoseček.

Didaktika matematiky:

1. Matematika jako komponenta kurikulárních dokumentů základní školy. Školská matematika v Rámcovém vzdělávacím programu. Didaktická analýza učiva matematiky v sekundární škole.
b) Rovnice a nerovnice v učivu ZŠ. Diofantovské rovnice.

2. Modernizace matematického vzdělávání. Základní trendy vývoje. Transmisivní a konstruktivistické přístupy k matematickému vzdělávání.
b) Goniometrické funkce na ZŠ.

3. Problematika motivace a kreativity v matematickém vyučování na základní škole. Zdroje, formy a nástroje motivace. Rozvíjení myšlení ve vyučování matematice.
b) Geometrické útvary v rovině v učivu ZŠ.

4. Komunikace v matematickém vyučování. Jazyk matematiky a jazyk školské matematiky. Terminologie a symbolika ve fylogenezi a ontogenezi.
b) Geometrické útvary v prostoru na ZŠ.

5. Pracovní metody a postupy ve vyučování matematice. Indukce, dedukce, analogie, experiment, heuristika, algoritmus. Heuristická metoda ve výuce matematiky.
b) Funkce v učivu matematiky na ZŠ.

6. Vytváření matematických pojmů. Definice, axiomatické systémy, věty a důkazy matematických vět.
b) Shodná zobrazení v rovině. Osová a středová souměrnost. Posunutí a otáčení.

7. Matematické učební úlohy, jejich místo v matematickém vzdělávání základní školy. Metody řešení úloh.
b) Procenta v učivu základní školy.

8. Problematika evaluace v matematice. Hodnocení vzdělávacích výsledků žáků. Didaktický test. Chybný výkon žáka, jeho analýza a interpretace.
b) Záporná čísla v učivu ZŠ.

9. Materiální didaktické prostředky. Učebnice matematiky, učební pomůcky. Informační a komunikační technologie ve výuce matematiky.
b) Množiny bodů a středů kružnic v učivu ZŠ. Konstrukční úlohy.

10. Matematické vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami. Péče o matematické talenty, matematické soutěže. Poruchy učení a poruchy matematických schopností.
b) Algebraické výrazy, jejich úprava v matematice ZŠ.